

# 目 录

<b>第二章 单变量函数的微分学</b> .....	1
§ 1. 显函数的导函数 .....	1
§ 2. 反函数的导函数. 用参变数表示的函数的导函数. 隐函数的导函数 .....	111
§ 3. 导函数的几何意义 .....	123
§ 4. 函数的微分 .....	143
§ 5. 高阶的导函数和微分 .....	158
§ 6. 洛尔、拉格朗日及哥西定理 .....	228
§ 7. 函数的增大与减小. 不等式 .....	260
§ 8. 凹凸性. 拐点 .....	290
§ 9. 未定形的求值法 .....	307
§ 10. 台劳公式 .....	336
§ 11. 函数的极值. 函数的最大值和最小值 .....	363
§ 12. 依据函数的特征点作函数图形 .....	401
§ 13. 函数的极大值与极小值问题 .....	500
§ 14. 曲线的相切. 曲率圆. 渐屈线 .....	525
§ 15. 方程的近似解法 .....	541

## 第二章 单变量函数的微分学

### § 1. 显函数的导函数

1° 导函数的定义 若  $x$  及  $x_1 = x + \Delta x$  为自变量的值, 则差

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

称为函数  $y = f(x)$  的增量.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

有意义, 则称为导函数, 而函数  $f(x)$  本身在此情形下称为可微分的函数.

函数  $f'(x)$  在几何上是函数  $y = f(x)$  的图形在  $x$  点切线的斜率 ( $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ ) (图 2.1).

2° 求导函数的基本法则 若  $c$  为常数且函数  $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$  都有导函数, 则

$$(1) c' = 0; (2) (cu)' = cu';$$

$$(3) (u \pm v \pm w)' = u' \pm v' \pm w';$$

$$(4) (uv)' = u'v + v'u;$$

$$(5) \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0);$$

$$(6) (u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \text{ 为常数});$$

(7) 若函数  $y = f(u)$  及  $u = \varphi(x)$  都有导函数, 则

$$y'_{x'} = y'_u u'_{x'}.$$

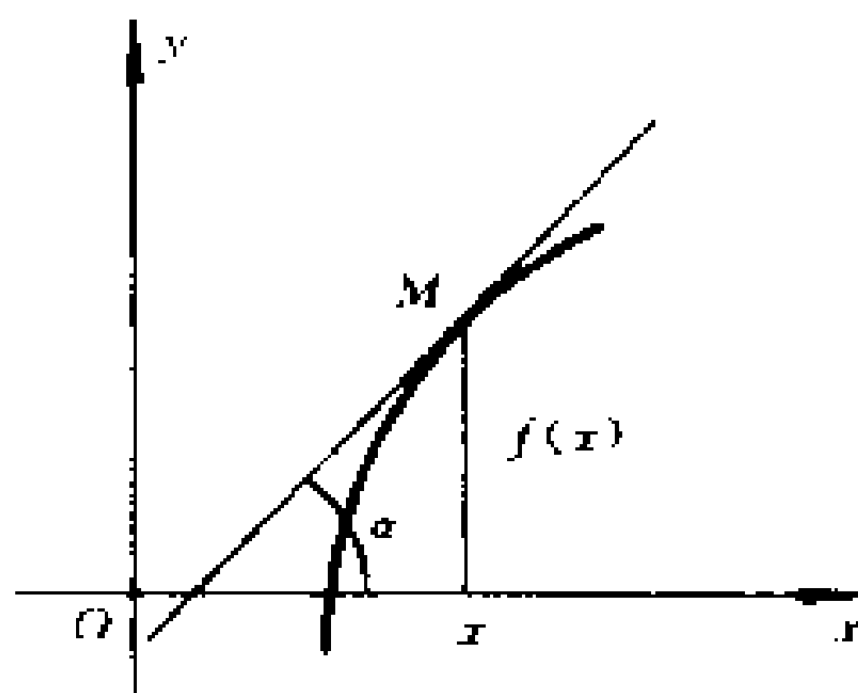


图 2.1

3° 基本公式 若  $x$  为自变数<sup>\*</sup>, 则

$$I. (x^n)' = nx^{n-1} (n \text{ 为常数});$$

$$II. (\sin x)' = \cos x; \quad III. (\cos x)' = -\sin x;$$

$$IV. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad V. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$VI. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$VII. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$VIII. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$IX. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$X. (a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0); \quad (e^x)' = e^x;$$

$$XI. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1);$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$XII. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \quad XIII. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$XIV. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad XV. (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

4° 单侧的导函数 表示式

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

及

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

分别称为函数  $f(x)$  在  $x$  点的左导函数或右导函数.

导函数  $f'(x)$  存在的充分且必要的条件是

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

---

\* 在本章基本公式及习题解答的叙述过程中, 一些明显的定义域要求, 例如本节公式 V 中要求  $x \neq k\pi$  ( $k$  整数), VI 中要求  $|x| < 1$  等等, 以及例如尔后 § 5 中相应的限制, 一般地就不再一一声明.

5° 无穷的导函数 若在某一点  $x$  有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

则称函数  $f(x)$  在  $x$  点有无穷的导函数. 在此种情形下, 函数  $y = f(x)$  的图形上在  $x$  点的切线与  $Ox$  轴垂直.

821. 若  $x$  由 1 变到 1000, 求自变量  $x$  的增量  $\Delta x$  和函数  $y = \lg x$  的对应的增量  $\Delta y$ .

**解**  $\Delta x = 1000 - 1 = 999;$

$$\Delta y = \lg 1000 - \lg 1 = 3.$$

822. 若  $x$  由 0.01 变到 0.001, 求自变量  $x$  的增量  $\Delta x$  和函数  $y = \frac{1}{x^2}$  的对应的增量  $\Delta y$ .

**解**  $\Delta x = 0.001 - 0.01 = -0.009;$

$$\Delta y = \frac{1}{(0.001)^2} - \frac{1}{(0.01)^2} = 990000.$$

823. 设:

$$(a) y = ax + b; (b) y = ax^2 + bx + c; (B) y = a^x.$$

若变量  $x$  得到增量  $\Delta x$ , 求增量  $\Delta y$ .

**解** (a)  $\Delta y = [(ax + a\Delta x) + b] - [ax + b] = a\Delta x;$

$$(b) \Delta y = [a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c]$$

$$- [ax^2 + bx + c]$$

$$= (2ax + b)\Delta x + a(\Delta x)^2;$$

$$(B) \Delta y = a^{x + \Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

824. 证明:

$$(a) \Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x);$$

$$(b) \Delta[f(x)g(x)] \\ = g(x + \Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x).$$

证 (a)  $\Delta[f(x) + g(x)]$   
 $= [f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]$   
 $= [f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)]$   
 $= \Delta f(x) + \Delta g(x),$

于是,

$$\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x);$$

$$(b) \Delta[f(x)g(x)] \\ = [f(x + \Delta x)g(x + \Delta x)] - [f(x)g(x)] \\ = [f(x + \Delta x) - f(x)]g(x + \Delta x) \\ + [g(x + \Delta x) - g(x)]f(x) \\ = \Delta f(x)g(x + \Delta x) + \Delta g(x)f(x),$$

于是,

$$\Delta[f(x)g(x)] \\ = g(x + \Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x).$$

同样,我们还可将(b)的结果写成

$$\Delta[f(x)g(x)] = f(x + \Delta x)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x).$$

825. 过曲线  $y = x^2$  上的二点  $A(2, 4)$  和  $A'(2 + \Delta x, 4 + \Delta y)$

引割线  $AA'$ , 求此割线的斜率, 设:

(a)  $\Delta x = 1$ ; (b)  $\Delta x = 0.1$ ; (c)  $\Delta x = 0.01$ ;

(d)  $\Delta x$  为任意小.

在已知曲线上  $A$  点的切线的斜率等于甚么?

**解** 割线  $AA'$  的斜率  $k_{AA'} = \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = 4 + \Delta x$ ,

(a)  $k_{AA'} = 5$ ; (b)  $k_{AA'} = 4.1$ ;

(c)  $k_{AA'} = 4.01$ ; (d)  $k_{AA'} = 4 + \Delta x$ .

于是, 在  $A$  点的切线斜率为

$$k_A = \lim_{A' \rightarrow A} k_{AA'} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4.$$

826. 把  $Ox$  轴上的线段  $1 \leq x \leq 1 + h$  利用函数关系  $y = x^3$  映变到  $Oy$  轴上. 求其平均的伸长系数. 设:

(a)  $h = 0.1$ ; (b)  $h = 0.01$ ; (c)  $h = 0.001$ , 计算此系数的值.

当  $x = 1$  时伸长的系数等于甚么?

**解** 平均伸长系数  $\bar{l} = \frac{(1 + h)^3 - 1^3}{h} = 3 + 3h + h^2$ ,

(a)  $\bar{l} = 3 + 3(0.1) + (0.1)^2 = 3.31$ ;

(b)  $\bar{l} = 3 + 3(0.01) + (0.01)^2 = 3.0301$ ;

(c)  $\bar{l} = 3 + 3(0.001) + (0.001)^2 = 3.003001$ .

于是,

$$l|_{x=1} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{l} = 3.$$

827. 动点沿  $Ox$  轴运动的规律由下式表出

$$x = 10t + 5t^2$$

式中  $t$  以秒计的时间,  $x$  为以米计的距离. 求在  $20 \leq t \leq 20 + \Delta t$  时间内运动的平均速度. 设: (a)  $\Delta t = 1$ ; (б)  $\Delta t = 0.1$ ; (в)  $\Delta t = 0.01$ , 计算此速度的值. 当  $t = 20$  时运动的速度等于甚么?

**解** 平均速度  $\bar{v} = \{[10(20 + \Delta t) + 5(20 + \Delta t)^2] - [10 \times 20 + 5 \times 20^2]\} \div \Delta t$   
 $= 210 + 5\Delta t$ (米/秒),

$$(a) \bar{v} = 210 + 5 \times 1 = 215 \text{ (米/秒)};$$

$$(б) \bar{v} = 210.5 \text{ (米/秒)};$$

$$(в) \bar{v} = 210.05 \text{ (米/秒)}.$$

于是,

$$v|_{t=20} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (210 + 5\Delta t) = 210 \text{ (米/秒)}.$$

828. 根据导函数的定义, 直接求下列函数的导函数:

$$(a) x^2; (б) x^3; (в) \frac{1}{x}; (\Gamma) \sqrt{x}; (\lambda) \sqrt[3]{x};$$

$$(e) \operatorname{tg} x; (\kappa) \operatorname{ctg} x; (э) \arcsin x; (и) \arccos x;$$

$$(\kappa) \arctg x.$$

**解** (a)  $y = x^2$ ,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

$$(6) y = x^3,$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2, \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2. \end{aligned}$$

$$(B) y = \frac{1}{x},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = -\frac{1}{x(\Delta x + x)}.$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{x(\Delta x + x)} \right] \\ &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

$$(r) y = \sqrt{x},$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$



$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (x > 0).$$

$$(d) y = \sqrt[3]{x},$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} (x \neq 0). \end{aligned}$$

$$(e) y = \operatorname{tg} x,$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \Delta x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x} - \operatorname{tg} x}{\Delta x} \\ &= \frac{\operatorname{tg} \Delta x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\Delta x (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x)} \\ &= \frac{\operatorname{tg} \Delta x \sec^2 x}{\Delta x (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x)}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x \sec^2 x}{\Delta x (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{(x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x} \\
&= \frac{\arcsin t}{t} \\
& \cdot \frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} + x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},
\end{aligned}$$

式中  $t = (x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$ ,

从而  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} t = 0$ .

于是,

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} + x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}} \\
&\cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},
\end{aligned}$$

其中  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1$ ;

(ii)  $y = \arccos x$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\arccos(x+\Delta x) - \arccos x}{\Delta x} \\
&= \frac{\arcsin[(x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2} - (x+\Delta x) \sqrt{1-x^2})]}{\Delta x} \\
&= \frac{\arcsin t}{t} \\
&\cdot \frac{-(2x+2\Delta x)}{(x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} + x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},
\end{aligned}$$

式中  $t = (x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$ .

从而  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} t = 0$ .

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(2x + \Delta x)}{(x + \Delta x) \sqrt{1 - x^2} + x \sqrt{1 - (x + \Delta x)^2}} \\ &\quad \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

(κ)  $y = \arctg x$ .

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\arctg(x + \Delta x) - \arctg x}{\Delta x} \\ &= \frac{\arctg \frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}}{\Delta x} \\ &= \frac{\arctg \frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}} \\ &\quad \cdot \frac{1}{1 + x(x + \Delta x)}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\arctg \frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}} \right] \end{aligned}$$

$$\left. \cdot \frac{1}{1+x(x+\Delta x)} \right] = \frac{1}{1+x^2},$$

其中利用  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\operatorname{tg} u} = 1$ .

829. 设:

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3,$$

求  $f'(1)$ ,  $f'(2)$  和  $f'(3)$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } f'(x) &= (x-2)^2(x-3)^3 \\ &\quad + 2(x-1)(x-2)(x-3)^3 \\ &\quad + 3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2 \\ &= 2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9). \end{aligned}$$

于是,

$$f'(1) = -8; f'(2) = f'(3) = 0.$$

830. 设:

$$f(x) = x^2 \sin(x-2),$$

求  $f'(2)$ .

$$\text{解 } f'(x) = 2x \sin(x-2) + x^2 \cos(x-2).$$

于是,

$$f'(2) = 4.$$

831. 设:

$$f(x) = x + (x-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}},$$

求  $f'(1)$ .

解 方法一:

若用复合函数求导法,可得

$$f'(x) = 1 + \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x}}.$$

于是,

$$f'(1) = 1 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

方法二:

若按定义作,注意到当  $x = 1$  时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \arcsin \sqrt{\frac{1 + \Delta x}{2 + \Delta x}},$$

即得

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( 1 + \arcsin \sqrt{\frac{1 + \Delta x}{2 + \Delta x}} \right) \\ &= 1 + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

832. 设函数  $f(x)$  在  $a$  点可微分,求

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

解 设  $\Delta x = x - a$ , 则当  $x \rightarrow a$  时,  $\Delta x \rightarrow 0$ . 于是,

$$\begin{aligned} \text{得} \quad & \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a). \end{aligned}$$

833. 证明:若函数  $f(x)$  可微分及  $n$  为自然数,则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f \left( x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right] = f'(x). \quad (1)$$

反之,若对于函数  $f(x)$  有极限(1)存在,则可否断定这个函数有导函数?研究迪里黑里函数的例子(参阅第一章第 734 题).

$$\begin{aligned} \text{证} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f \left( x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f \left( x + \frac{1}{n} \right) - f(x)}{\frac{1}{n}} = f'(x). \end{aligned}$$

反之,就不一定对了.例如,对于迪里黑里函数

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

在任一有理点是不连续的,当然其导数也不存在.但由于  $x + \frac{1}{n}$  仍为有理数,故当  $x$  为有理数时,

$$\chi \left( x + \frac{1}{n} \right) - \chi(x) = 1 - 1 = 0,$$

从而,极限(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \chi \left( x + \frac{1}{n} \right) - \chi(x) \right] = 0$$

存在.

利用导函数表,求下列函数的导函数:

834.  $y = 2 + x - x^2$ . 问  $y'(0)$ ;  $y' \left( \frac{1}{2} \right)$ ;  $y'(1)$ ;  $y'(-10)$  等于甚么?

解 由于  $y'(x) = 1 - 2x$ , 故得

$$y'(0) = 1; y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0; y'(1) = -1;$$

$$y'(-10) = 21.$$

835.  $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$ . 当  $x$  为何值时:

$$(a) y'(x) = 0; (b) y'(x) = -2; (B) y'(x) = 10?$$

**解**  $y'(x) = x^2 + x - 2.$

(a) 令  $y'(x) = 0$ , 得  $x^2 + x - 2 = 0$ . 于是,  $x = -2$  或  $x = 1$ ;

(b) 令  $y'(x) = -2$ , 得  $x^2 + x = 0$ . 于是,  $x = -1$  或  $x = 0$ ;

(B) 令  $y'(x) = 10$ ; 得  $x^2 + x - 12 = 0$ . 于是,  $x = -4$  或  $x = 3$ .

836.  $y = a^5 + 5a^3x^2 - x^5.$

**解**  $y' = 10a^3x - 5x^4.$

837.  $y = \frac{ax + b}{a + b}.$

**解**  $y' = \frac{a}{a + b}.$

838.  $y = (x - a)(x - b).$

**解**  $y' = x - a + x - b = 2x - a - b.$

839.  $y = (x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3.$

**解**  $y' = (x+2)^2(x+3)^3 + 2(x+1)(x+2)(x+3)^3$   
 $+ 3(x+1)(x+2)^2(x+3)^2$

$$\begin{aligned}
&= (x+2)(x+3)^2[(x+2)(x+3) \\
&\quad + 2(x+1)(x+3) + 3(x+1)(x+2)] \\
&= 2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9).
\end{aligned}$$

840.  $y = (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha).$

**解**  $y' = \sin\alpha(x\cos\alpha - \sin\alpha)$   
 $+ \cos\alpha(x\sin\alpha + \cos\alpha)$   
 $= x\sin 2\alpha + \cos 2\alpha.$

841.  $y = (1 + nx^m)(1 + mx^n).$

**解**  $y' = mn x^{m-1}(1 + mx^n) + mn x^{n-1}(1 + nx^m)$   
 $= mn[x^{m-1} + x^{n-1} + (m+n)x^{m+n-1}].$

842.  $y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3.$

**解**  $y' = -(1-x^2)^2(1-x^3)^3$   
 $- 4x(1-x)(1-x^2)(1-x^3)^3$   
 $- 9x^2(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2$   
 $= -(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1+6x$   
 $+ 15x^2 + 14x^3)$   
 $= -(1-x)^5(1+x)(1+2x)(1+4x$   
 $+ 7x^2)(1+x+x^2)^2.$

843.  $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}.$

**解**  $y' = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4}\right) (x \neq 0).$



844. 证明公式

$$\left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)' &= \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} \\ &= \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}. \end{aligned}$$

这里已暗设  $cx+d \neq 0$ .

求下列函数之导函数:

$$845. y = \frac{2x}{1-x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{2(1-x^2) + 4x^2}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \quad (|x| \neq 1). \end{aligned}$$

$$846. y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{由于 } y &= \frac{2}{1-x+x^2} - 1, \text{ 故} \\ y' &= \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}. \end{aligned}$$

$$847. y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{(1-x)^2(1+x)^3 - x[3(1+x)^2(1-x)^2 - 2(1-x)(1+x)^3]}{(1-x)^4(1+x)^6} \end{aligned}$$

$$= \frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}, (|x| \neq 1).$$

$$848. y = \frac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}.$$

解  $y' =$

$$\begin{aligned} & \frac{(1-x)^2[-2x(3-x^3)-3x^2(2-x^2)]+2(1-x)(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^4} \\ &= \frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3} (x \neq 1). \end{aligned}$$

$$849. y = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{-p(1-x)^{p-1}(1+x)^q - q(1+x)^{q-1}(1-x)^p}{(1+x)^{2q}} \\ &= -\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}} \\ & \quad (x \neq -1). \end{aligned}$$

$$850. y = \frac{x^p(1-x)^q}{1+x}.$$

解

$$\begin{aligned} y' &= \frac{[px^{p-1}(1-x)^q - qx^p(1-x)^{q-1}](1+x) - x^p(1-x)^q}{(1+x)^2} \\ &= \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2} [p - (q+1)x - (p+q-1)x^2] \\ & \quad (x \neq -1). \end{aligned}$$

$$851. y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}.$$

$$\text{解 } y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} (x > 0).$$

$$852. y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} (|x| < |a|).\end{aligned}$$

$$858. y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2}} \\ &\quad \cdot \frac{3x^2(1-x^3) + 3x^2(1+x^3)}{(1-x^3)^2} \\ &= \frac{2x^2}{1-x^6} \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} (|x| \neq 1).\end{aligned}$$

$$859. y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= -\frac{1}{(1+x^2)(x+\sqrt{1+x^2})^2} \\ &\quad \left[ \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + 2x \right] \\ &= -\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

$$860. y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right] \\
&= \frac{1 + 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \\
& \quad (x > 0).
\end{aligned}$$

$$861. y = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad y &= \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}\right)^2}} \\
&\quad \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{x})^2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\
&= \frac{1}{27\sqrt[3]{x^2(1 + \sqrt[3]{x})^2} \cdot \sqrt[3]{\left(1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}\right)^2}} \\
& \quad (x \neq 0, x \neq -1, x \neq -8).
\end{aligned}$$

$$862. y = \cos 2x - 2\sin x.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad y' &= -2\sin 2x - 2\cos x \\
&= -2\cos x(1 + 2\sin x).
\end{aligned}$$

$$863. y = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad y' &= -2x\cos x - (2 - x^2)\sin x + 2\sin x \\
&\quad + 2x\cos x \\
&= x^2\sin x.
\end{aligned}$$

$$864. y = \sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x).$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= -2\sin x \cos x \cos(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x) \\
&\quad - 2\sin x \cos x \sin(\cos^2 x) \sin(\sin^2 x) \\
&= -\sin 2x [\cos(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x) \\
&\quad + \sin(\cos^2 x) \sin(\sin^2 x)] \\
&= -\sin 2x \cos(\cos^2 x - \sin^2 x) \\
&= -\sin 2x \cos(\cos 2x).
\end{aligned}$$

$$865. y = \sin^n x \cos nx.$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= n\sin^{n-1} x \cos x \cos nx - n\sin^n x \sin nx \\
&= n\sin^{n-1} x (\cos x \cos nx - \sin x \sin nx) \\
&= n\sin^{n-1} x \cos(n+1)x.
\end{aligned}$$

$$866. y = \sin(\sin(\sin x)).$$

$$\text{解 } y' = \cos x \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos[\sin(\sin x)].$$

$$867. y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= \frac{2\sin x (\cos x \sin x^2 - x \sin x \cos x^2)}{\sin^2 x^2} \\
&\quad (x^2 \neq k\pi; k = 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

$$868. y = \frac{\cos x}{2\sin^2 x}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= \frac{-2\sin^3 x - 4\sin x \cos^2 x}{4\sin^4 x} \\
&= -\frac{1 + \cos^2 x}{2\sin^3 x} (x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).
\end{aligned}$$

$$869. y = \frac{1}{\cos^n x}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= -\frac{1}{\cos^{2n}x}(-n\cos^{n-1}x\sin x) \\ &= \frac{n\sin x}{\cos^{n+1}x} \left(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k \text{ 为整数}\right).\end{aligned}$$

$$870. y = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{1}{(\cos x + x\sin x)^2}[(x\sin x - \cos x \\ &\quad + \cos x)(\cos x + x\sin x) - (\sin x - \sin x \\ &\quad + x\cos x)(\sin x - x\cos x)] \\ &= \frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}.\end{aligned}$$

$$871. y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{1}{2}\sec^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\csc^2 \frac{x}{2} \\ &= \frac{2}{\sin^2 x} (x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).\end{aligned}$$

$$872. y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x + \operatorname{tg}^4 x \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^6 x \\ &\quad (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).\end{aligned}$$

$$873. y = 4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{8}{3}(\operatorname{ctg} x)^{-\frac{1}{3}}(-\csc^2 x) \\ &\quad + \frac{8}{3}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{5}{3}}(-\csc^2 x) \\ &= -\frac{8}{3\sin^4 x \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}\end{aligned}$$

$$(x \neq k\pi; x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$874. y = \sec^2 \frac{x}{a} + \csc^2 \frac{x}{a}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{2}{a} \sec^2 \frac{x}{a} \operatorname{tg} \frac{x}{a} - \frac{2}{a} \csc^2 \frac{x}{a} \operatorname{ctg} \frac{x}{a} \\ &= \frac{2}{a} \left( \frac{\sin \frac{x}{a}}{\cos^3 \frac{x}{a}} - \frac{\cos \frac{x}{a}}{\sin^3 \frac{x}{a}} \right) \\ &= \frac{2}{a} \cdot \frac{\sin^4 \frac{x}{a} - \cos^4 \frac{x}{a}}{\sin^3 \frac{x}{a} \cos^3 \frac{x}{a}} \\ &= \frac{16 \left( \sin^2 \frac{x}{a} - \cos^2 \frac{x}{a} \right)}{a \left( 2 \sin \frac{x}{a} \cos \frac{x}{a} \right)^3} = \frac{-16 \cos \frac{2x}{a}}{a \sin^3 \frac{2x}{a}} \end{aligned}$$

$$(x \neq \frac{k\pi a}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$875. y = \sin[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)].$$

$$\text{解} \quad y' = \cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)].$$

$$\cdot \{-2\cos(\operatorname{tg}^3 x)\sin(\operatorname{tg}^3 x)\}$$

$$\cdot [3\operatorname{tg}^2 x \sec^2 x]$$

$$= -3\operatorname{tg}^2 x \sec^2 x \cdot \sin(2\operatorname{tg}^3 x)$$

$$\cdot \cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]$$

$$(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$876. y = e^{-x^2}.$$

解  $y' = -2xe^{-x^2}.$

877.  $y = 2^{\operatorname{ctg} \frac{1}{x}}.$

解  $y' = -\frac{1}{x^2} \sec^2 \frac{1}{x} \cdot 2^{\operatorname{ctg} \frac{1}{x}} \ln 2 \quad (x \neq 0).$

878.  $y = e^x(x^2 - 2x + 2).$

解  $y' = e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) = x^2 e^x.$

879.  $y = \left[ \frac{1-x^2}{2} \sin x - \frac{(1+x)^2}{2} \cos x \right] e^{-x}.$

解  $y' = -e^{-x} \left[ \frac{1-x^2}{2} \sin x - \frac{(1+x)^2}{2} \cos x \right]$   
 $+ e^{-x} \left[ \frac{1-x^2}{2} \cos x + x \sin x \right]$   
 $+ \frac{(1+x)^2}{2} \sin x - (1+x) \cos x$   
 $= x^2 e^{-x} \sin x.$

880.  $y = e^x \left( 1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right).$

解  $y' = e^x \left( 1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{2} e^x \csc^2 \frac{x}{2}$   
 $= \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \quad (x \neq 2k\pi; k \text{ 为整数}).$

881.  $y = \frac{\ln 3 \cdot \sin x + \cos x}{3^x}.$

解

$y' = \frac{3^x (\ln 3 \cdot \cos x - \sin x) - 3^x \ln 3 (\ln 3 \cdot \sin x + \cos x)}{3^{2x}}$   
 $= -\frac{(1 + \ln^2 3) \sin x}{3^x}.$



$$882. y = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{ax} [a(a \sin bx - b \cos bx) \\ &\quad + (ab \cos bx + b^2 \sin bx)] \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} e^{ax} \sin bx. \end{aligned}$$

$$883. y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}.$$

$$\text{解 } y' = e^x [1 + e^{e^x} (1 + e^{e^{e^x}})].$$

$$884. y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^b \quad (a > 0, b > 0).$$

解 两边取对数, 得

$$\ln y = x \ln \frac{a}{b} + a(\ln b - \ln x) + b(\ln x - \ln a).$$

两端同时对  $x$  求导数, 得

$$\frac{y'}{y} = \ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}.$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= y \left( \ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right) \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^b \left( \ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right) \quad (x > 0). \end{aligned}$$

$$885. y = x^{a^x} + a^{x^a} + a^{a^x} \quad (a > 0).$$

$$\text{解 } y' = a^a x^{a^a-1} + a x^{a-1} a^{x^a} \ln a + a^x \cdot a^{a^x} \ln^2 a.$$

$$886. y = \lg^3 x^2.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= 3 \lg^2 x^2 \cdot \frac{1}{x^2} 2x \lg e \\ &= \frac{6}{x} \lg e \cdot \lg^2 x^2 \quad (x \neq 0). \end{aligned}$$

或按  $y = (\lg e \cdot \ln x^2)^3 = 8 \lg^3 e \cdot \ln^3 |x|$  求导数, 有

$$y' = 24 \lg^3 e \cdot \left( \frac{1}{x} \ln^2 |x| \right)' (x \neq 0).$$

\* )  $(\ln |x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}$ , 以后不再说明.

887.  $y = \ln[\ln(\ln x)]$ .

解  $y' = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} (x > e),$

888.  $y = \ln[\ln^2(\ln^3 x)]$ .

解  $y' = \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2 \ln(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\ln^3 x}$   
 $\cdot 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$   
 $= \frac{6}{x \ln x \cdot \ln(\ln^3 x)} (x > e),$

889.  $y = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2(1+x)}.$

解  $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2(1+x)^2}$   
 $= \frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)} (x > -1).$

890.  $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}.$

解  $y' = \frac{1}{4} [\ln(x^2-1) - \ln(x^2+1)]'$   
 $= \frac{1}{4} \left[ \frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1} \right] = \frac{x}{x^4-1} (|x| > 1).$

891.  $y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{1+x^4}.$

$$\text{解 } y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \ln|x| - \frac{1}{4}\ln(1+x^4),$$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{4x^3}{4(1+x^4)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot 4x^3 \\ &= \frac{1}{x(1+x^4)^2} (x \neq 0). \end{aligned}$$

$$892. y = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \frac{x\sqrt{3} - \sqrt{2}}{x\sqrt{3} + \sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y &= \frac{1}{2\sqrt{6}} [\ln|x\sqrt{3} - \sqrt{2}| \\ &\quad - \ln|x\sqrt{3} + \sqrt{2}|] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left( \frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{3x^2 - 2} \left( |x| > \sqrt{\frac{2}{3}} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 893. y &= \frac{1}{1-k} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{\sqrt{k}}{1-k} \ln \frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}} \\ &\quad (0 < k < 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{1-k} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{k}}{1-k} \left( \frac{\sqrt{k}}{1+x\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}} \right) \\ &= \frac{2}{(1-x^2)(1-kx^2)} (|x| < 1). \end{aligned}$$

$$894. y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1}).$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{x^2}{2 \sqrt{x^2 + a^2}} \\ &\quad + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ &= \sqrt{x^2 + a^2}.\end{aligned}$$

$$899. y = \frac{1}{2 \sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x \sqrt{b}}{\sqrt{a} - x \sqrt{b}} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{1}{2 \sqrt{ab}} \left( \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + x \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x \sqrt{b}} \right) \\ &= \frac{1}{a - bx^2} \left( |x| < \sqrt{\frac{a}{b}} \right).\end{aligned}$$

$$900. y = \frac{2 + 3x^2}{x^4} \sqrt{1 - x^2} + 3 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{6x^5 - 4x^3(2 + 3x^2)}{x^8} \sqrt{1 - x^2} \\ &\quad - \frac{x(2 + 3x^2)}{x^4 \sqrt{1 - x^2}} + \frac{3}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \\ &\quad \cdot \left( -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right) - \frac{3}{x} \\ &= -\frac{8}{x^5 \sqrt{1 - x^2}} \quad (0 < |x| < 1).\end{aligned}$$

$$901. y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{\sin x} \quad (0 < x - 2k\pi < \pi, k \text{ 为整数}).\end{aligned}$$

$$902. y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \sec^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x}\end{aligned}$$

$$(|x - 2k\pi| < \frac{\pi}{2}; k \text{ 为整数}).$$

$$903. y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln \sin x.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= -\operatorname{ctg} x \cdot \csc^2 x + \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= -\operatorname{ctg}^3 x \quad (0 < x - 2k\pi < \pi; k \text{ 为整数}).\end{aligned}$$

$$904. y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{1}{2} \left( \frac{-\cos x}{1 - \sin x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) \\ &= -\frac{1}{\cos x} \quad (x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k \text{ 为整数}).\end{aligned}$$

$$905. y = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \ln \sqrt{\frac{1 + \cos x}{\sin x}}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{\sin^3 x + 2\sin x \cos^2 x}{2\sin^4 x} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{-\sin x}{1 + \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right)\end{aligned}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} (0 < x - 2k\pi < \pi; k \text{ 为整数}).$$

$$906. y = \ln \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x}{a + b \cos x} (0 \leq |a| < |b|).$$

解 当  $a = 0$  时,  $y = \ln \frac{1 + \sin x}{\cos x}$ . 由于  $1 + \sin x$  非负, 为使对数有意义, 必须有

$$\begin{cases} 1 + \sin x > 0, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

当  $\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi < x < \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$  ( $k$  为整数) 时, 上述不等式成立. 在此域内, 得

$$y' = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x},$$

当  $a \neq 0$  时, 记  $y = \ln u(x)$ , 而

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1 + \frac{a}{b} \cos x + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \sin x}{\frac{a}{b} + \cos x} \\ &= \frac{1 + \cos \varphi_0 \cos x + \sin \varphi_0 \sin x}{\cos \varphi_0 + \cos x} \\ &= \frac{1 + \cos(x - \varphi_0)}{\cos x + \cos \varphi_0} = \frac{v_1(x)}{v_2(x)}, \end{aligned}$$

其中  $\varphi_0 = \arctg \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$ . 显然  $v_1(x) \geq 0$ . 为保证  $y$  可导, 首先必须有  $u(x) > 0$ , 故应有  $v_1(x) \neq 0$  (从而  $v_1(x) > 0$ ), 进而应有  $v_2(x) > 0$ . 于是,  $y$  的存在域  $R$  为满足不等式

$$\begin{cases} v_1(x) \neq 0, \\ v_2(x) > 0 \end{cases}$$

的一切  $x$  值, 记成

$$R = \{x | v_1(x) \neq 0, v_2(x) > 0\},$$

则

$$R = \{x | \cos x + \cos \varphi_0 > 0 \text{ 且 } x \neq (2k+1)\pi + \varphi_0; \\ k \text{ 为整数}\}.$$

在此域内, 得

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-\sin(x - \varphi_0)}{1 + \cos(x - \varphi_0)} + \frac{\sin x}{\cos x + \cos \varphi_0} \\ &= \frac{-\sin x \cos \varphi_0 + \cos x \sin \varphi_0}{1 + \cos x \cos \varphi_0 + \sin x \sin \varphi_0} \\ &\quad + \frac{\sin x}{\cos x + \cos \varphi_0} \\ &= \frac{-\frac{a}{b} \sin x + \cos x \cdot \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}}{1 + \frac{a}{b} \cos x + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \sin x} \\ &\quad + \frac{\sin x}{\cos x + \frac{a}{b}} \\ &= \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a + b \cos x}, \end{aligned}$$

其实此结果也包含了  $a = 0$  时的情形.

$$907. y = \frac{1}{x} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= -\frac{1}{x^2}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6) \\
 &\quad + \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}\ln^2 x + \frac{6}{x}\ln x + \frac{6}{x}\right) \\
 &= -\frac{\ln^3 x}{x^2} \quad (x > 0).
 \end{aligned}$$

$$908. y = \frac{1}{4x^4}\ln \frac{1}{x} - \frac{1}{16x^4}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= -\frac{1}{x^5}\ln \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^5} + \frac{1}{4x^5} \\
 &= \frac{1}{x^5}\ln x \quad (x > 0).
 \end{aligned}$$

$$909. y = \frac{3}{2}(1 - \sqrt[3]{1+x^2})^2 + 3\ln(1 + \sqrt[3]{1+x^2}).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{3}{2} \cdot 2(1 - \sqrt[3]{1+x^2}) \left[ -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}} \right] \\
 &\quad + \frac{3}{1 + \sqrt[3]{1+x^2}} \cdot \frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}} \\
 &= \frac{2x}{1 + \sqrt[3]{1+x^2}}.
 \end{aligned}$$

$$910. y = \ln\left[\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}\right)\right].$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}\right)} \left[ -\frac{1}{x^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}} \left( -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) \right]
 \end{aligned}$$



$$= - \frac{1 + x + \frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}}{\left(1 + x \ln \frac{1}{x}\right) \left(1 + x \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}\right)\right)} \\ (x > 0).$$

911.  $y = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)].$

解  $y' = [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$   
 $+ x \left[ \frac{1}{x} \cos(\ln x) + \frac{1}{x} \sin(\ln x) \right]$   
 $= 2\sin(\ln x) \quad (x > 0).$

912<sup>+</sup>.  $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x.$

解  $y' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + \sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x$   
 $- \cos x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x$   
 $= \sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x \quad (0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数}).$

913.  $y = \arcsin \frac{x}{2}.$

解  $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \quad (|x| < 2).$

914.  $y = \arccos \frac{1-x}{\sqrt{2}}.$

解  $y' = - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} \quad (|x-1| < \sqrt{2}).$$

915.  $y = \arctg \frac{x^2}{a}.$

解  $y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2}{a}\right)^2} \cdot \frac{2x}{a} = \frac{2ax}{a^2 + x^4} (a \neq 0).$

916.  $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{x}.$

解  $y' = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)$   
 $= \frac{1}{x^2 + 2} \quad (x \neq 0).$

917.  $y = \sqrt{x} - \arctg \sqrt{x}.$

解  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$   
 $= \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} \quad (x \geq 0).$

918.  $y = x + \sqrt{1-x^2} \arccos x.$

解  $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x$   
 $- \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2}$   
 $= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x \quad (|x| < 1).$

919.  $y = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x}.$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad y' &= \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{x}{1+x}}} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}} \cdot \frac{1+x-x}{(1+x)^2} \\
 &\quad + \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \quad (x \geq 0).
 \end{aligned}$$

$$920. \quad y = \arccos \frac{1}{x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad y' &= - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} \left( - \frac{1}{x^2} \right) \\
 &= \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}} \quad (|x| > 1).
 \end{aligned}$$

$$921. \quad y = \arcsin(\sin x).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad y' &= \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \operatorname{sgn}(\cos x) \\
 &\quad (x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k \text{ 为整数}).
 \end{aligned}$$

$$922. \quad y = \arccos(\cos^2 x).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad y' &= \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos^4 x}} = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^2 x (1 + \cos^2 x)}} \\
 &= \frac{2\operatorname{sgn}(\sin x) \cdot \cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \quad (x \neq k\pi; k \text{ 为整数}).
 \end{aligned}$$

923.  $y = \arcsin(\sin x - \cos x)$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{1 - (\sin x - \cos x)^2}} \\ &= \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}}.\end{aligned}$$

$$(0 < x - k\pi < \frac{\pi}{2}; k \text{ 为整数}).$$

924.  $y = \arccos \sqrt{1 - x^2}$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{-1}{\sqrt{1 - (1 - x^2)}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (0 < |x| < 1).\end{aligned}$$

925.  $y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{(1-x) + (1+x)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} \quad (x \neq 1).\end{aligned}$$

926.  $y = \operatorname{arccotg} \left( \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right)$ .

解

$$\begin{aligned}y' &= \frac{-1}{1 + \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)^2} \\ &\quad \cdot \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= 1 \quad (x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}; k \text{ 为整数}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} - 2\cos x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sin x) \\ &\quad - \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} \\ &= -2\cos x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sin x).\end{aligned}$$

$$932. y = \ln \left( \operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{1}{\operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - x^{-1}}} \cdot \frac{-1}{2x \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2x \sqrt{x - 1} \operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{x}}} \quad (x > 1).\end{aligned}$$

$$933. y = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{b}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{1}{x+a} - \frac{x}{x^2+b^2} + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{b \left( 1 + \frac{x^2}{b^2} \right)} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{(x+a)(b^2 + x^2)} \quad (x > -a).\end{aligned}$$

$$934. y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} \quad (a > 0).$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{2 \sqrt{a^2 - x^2}} \\ &\quad + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &= \sqrt{a^2 - x^2}.\end{aligned}$$

$$935. y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{1}{1+x^3} \quad (x \neq -1).
 \end{aligned}$$

$$936. \quad y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left( \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1} \right)^2} \\
 &\quad \cdot \frac{\sqrt{2}(x^2 - 1) - 2x^2\sqrt{2}}{(x^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{1}{1+x^4} \quad (|x| \neq 1).
 \end{aligned}$$

$$937. \quad y = x(\operatorname{arc} \sin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \sin x - 2x.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= (\operatorname{arc} \sin x)^2 + \frac{2x \operatorname{arc} \sin x}{\sqrt{1-x^2}} \\
 &\quad - \frac{2x \operatorname{arc} \sin x}{\sqrt{1-x^2}} + 2 - 2 \\
 &= (\operatorname{arc} \sin x)^2 \quad (|x| < 1).
 \end{aligned}$$

$$938. \quad y = \frac{\operatorname{arc} \cos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arccos x}{x^2} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1 - \sqrt{1-x^2}} + \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1 + \sqrt{1-x^2}} \right) \\
 &= -\frac{\arccos x}{x^2} \quad (0 < |x| < 1).
 \end{aligned}$$

$$939. \quad y = \arctg \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{1 + (x^2 - 1)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} \\
 &\quad + \frac{x \ln x}{(x^2 - 1) \sqrt{x^2 - 1}} \\
 &= \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (x > 1).
 \end{aligned}$$

$$940. \quad y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right) \\
 &= \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (|x| < 1).
 \end{aligned}$$

$$941. \quad y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{12} \left( \frac{4x^3 - 2x}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{4x}{x^2 + 1} \right)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1}\right)^2} \left( \frac{-4\sqrt{3}x}{(2x^2 - 1)^2} \right) \\ = -\frac{x^3}{1 + x^6} \left( |x| \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

942.  $y = \frac{x^6}{1 + x^{12}} - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x^6.$

解  $y' = \frac{6x^5(1 + x^{12}) - 12x^{17}}{(1 + x^{12})^2} + \frac{6x^5}{1 + x^{12}} \\ = \frac{12x^5}{(1 + x^{12})^2}.$

943<sup>+</sup>.  $y = \ln \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}} + \sqrt{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}.$

解  $y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2} \cdot (1 - \sqrt[3]{x})} \\ - \frac{1}{2(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} \left( \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \right) \\ + \sqrt{3} \frac{1}{1 + \left(\frac{1 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{x^2}} \\ = -\frac{1}{(1 - x)\sqrt[3]{x}} (-\infty < x < 1, x \neq 0).$

944.  $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}.$

解  $y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}\right)^2}$



$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{1 + \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1 + \sqrt{1-x^2})^2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

945.  $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}} \quad (a > 0).$

解  $y' = -\frac{1}{1 + \frac{(a-2x)^2}{4(ax-x^2)}} \cdot \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{-2\sqrt{ax-x^2} - \frac{(a-2x)^2}{2\sqrt{ax-x^2}}}{ax-x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{ax-x^2}} \quad (0 < x < a).
\end{aligned}$$

946.  $y = \frac{3-x}{2} \sqrt{1-2x-x^2} + 2\operatorname{arc} \sin \frac{1+x}{\sqrt{2}}.$

解  $y' = -\frac{1}{2} \sqrt{1-2x-x^2} - \frac{3-x}{2} \cdot \frac{1+x}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

$$\begin{aligned}
& + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1+x}{\sqrt{2}}\right)^2}} \\
&= \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} \quad (|x+1| < \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

947.  $y = \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + x}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$

解  $y' = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4} + x} \cdot \left[ 1 + \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}} \right] \right.$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} \left[ \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}} - 1 \right] \Bigg\} \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} \right)^2} \\
& \cdot \frac{1}{x^2} \left[ \frac{x^4}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}} - \sqrt[4]{1+x^4} \right] \\
& = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} \quad (x \neq 0).
\end{aligned}$$

948.  $y = \arctg(\operatorname{tg}^2 x)$ .

解  $y' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^4 x} \cdot 2 \operatorname{tg} x \sec^2 x$

$$= \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \quad (x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k \text{ 为整数}).$$

949.  $y = \sqrt{1-x^2} \cdot \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}}$

$$+ \sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$$

解  $y' = - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} \left( - \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \frac{x}{(1 - \sqrt{1-x^2}) \sqrt{1-x^2}} \right.$$

$$\left. + \frac{x}{(1 + \sqrt{1-x^2}) \sqrt{1-x^2}} \right]$$

$$- \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$(0 < |x| < 1).$$

950.  $y = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2.$

解  $y' = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2}$

$$- \frac{1}{1+x^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$$

$$= \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

951.  $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}).$

解  $y' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} \left( e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}} \right)$

$$= \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$$

952.  $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x + \sqrt{1+x^2}).$

解  $y' = \frac{1}{1+(x+\sqrt{1+x^2})^2} \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$

$$= \frac{1}{2(1+x^2)}.$$

953.  $y = \operatorname{arc} \sin \left( \frac{\sin \alpha \sin x}{1 - \cos \alpha \cos x} \right).$

解

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{\sin \alpha \sin x}{1 - \cos \alpha \cos x} \right)^2}}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{\sin \alpha \cos x (1 - \cos \alpha \cos x) - \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 x}{(1 - \cos \alpha \cos x)^2} \\
&= \frac{1 - \cos \alpha \cos x}{\sqrt{(\cos x - \cos \alpha)^2}} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot (\cos x - \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha \cos x)^2} \\
&= \frac{\sin \alpha \cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \cos \alpha)}{1 - \cos \alpha \cos x}
\end{aligned}$$

( $\cos x \neq \cos \alpha$ , 即  $x \neq \alpha + 2k\pi$ ,  $k$  为整数).

$$954. \quad y = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{x^2+2} - x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2} + x\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad y' &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2+2} - x\sqrt{3}} \right. \\
&\quad \cdot \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{3} \right) \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{x^2+2} + x\sqrt{3}} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + \sqrt{3} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2+2}{x^2}} \cdot \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{x^2+2}}{x^2} \\
&= \frac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}} \quad (0 < |x| < 1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
955. \quad y &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

$$\text{解} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2x^2}{1+x^4}}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+x^4} - \frac{2\sqrt{2}x^4}{\sqrt{1+x^4}}}{1+x^4} \\
& - \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}} \left( \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} \right. \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}} \right. \\
& \left. \left( \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} + \sqrt{2} \right) \right\} \\
& = \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} \quad (|x| \neq 1).
\end{aligned}$$

$$956. \quad y = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad y' &= \frac{1}{(1+x^2)^2} \left\{ \left( \sqrt{1-x^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) (1+x^2) - 2x^2 \sqrt{1-x^2} \right\} \\
& + \frac{3}{\sqrt{2} \left( 1 + \frac{2x^2}{1-x^2} \right)} \\
& \cdot \frac{\sqrt{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{\sqrt{2}x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\
& = \frac{4}{(x^2+1)^2 \sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

$$957^+ . y = \operatorname{arc} \cos(\sin x^2 - \cos x^2).$$

$$(|x| < 1).$$

$$960. y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{e^x}{1 + e^{2x}} - \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} \right) \\ &= \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1}. \end{aligned}$$

$$961. y = x + x^x + x^{x^x} (x > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= 1 + x^x(1 + \ln x) + x^{x^x}(x^x \ln x)' \\ &= 1 + x^x(1 + \ln x) + x^x \cdot x^{x^x} \left( \frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right). \end{aligned}$$

$$962. y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x} (a > 0, x > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= x^{x^a} \left( ax^{a-1} \ln x + \frac{x^a}{x} \right) \\ &\quad + x^{a^x} \left( a^x \ln a \cdot \ln x + \frac{a^x}{x} \right) \\ &\quad + a^{x^x} \cdot \ln a \cdot x^x (1 + \ln x) \\ &= x^{a-1} x^{x^a} (1 + a \ln x) + a^x x^{a^x} \left( \frac{1}{x} + \ln a \ln x \right) \\ &\quad + x^x \cdot a^{x^x} \ln a (1 + \ln x). \end{aligned}$$

$$963. y = \sqrt[x]{x} \quad (x > 0).$$

$$\text{解 } y' = \left( e^{\frac{1}{x} \ln x} \right)' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x).$$

$$964. y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= (\sin x)^{\cos x} \left[ -\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right] \\ &\quad + (\cos x)^{\sin x} \left[ \cos x \cdot \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right] \\ &= (\sin x)^{\cos x + 1} [\operatorname{ctg}^2 x - \ln(\sin x)] \\ &\quad - (\cos x)^{\sin x + 1} [\operatorname{tg}^2 x - \ln(\cos x)] \\ &\quad \left( 0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数} \right). \end{aligned}$$

$$965^{+*}. y = (\ln x)^x : x^{\ln x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y &= \frac{e^{x \ln(\ln x)}}{e^{\ln^2 x}} = e^{x \ln(\ln x) - \ln^2 x}. \\ y' &= \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \{ [x \ln(\ln x)]' - (\ln^2 x)' \} \\ &= \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \left\{ \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{2 \ln x}{x} \right\} \\ &= \frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x + 1}} \{ x \ln x \cdot \ln(\ln x) + x - 2 \ln^2 x \}. \end{aligned}$$

$$966. y = \lg_x e.$$

$$\text{解 由 } y = \lg_x e \quad \text{推得 } y = \frac{1}{\ln x}.$$

于是,

$$y' = -\frac{1}{x \ln^2 x} = -\frac{1}{x} (\lg_x e)^2 (x > 0, x \neq 1).$$

---

\* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致,以后不再说明,中译本基本是按俄文第二版翻译的,俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正。

$$967. y = \ln(\operatorname{ch} x) + \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$\text{解 } y' = \operatorname{th} x - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} = \operatorname{th}^3 x.$$

$$968. y = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} - \ln\left(\operatorname{cth} \frac{x}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{\operatorname{sh}^3 x - 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^4 x} + \frac{1}{2\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} \cdot \operatorname{cth} \frac{x}{2}} \\ &= -\frac{2}{\operatorname{sh}^3 x} (x > 0). \end{aligned}$$

$$969. y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{th} x).$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{1 + \operatorname{th}^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch} 2x}.$$

$$970. y = \operatorname{arc} \cos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}} \left(-\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}\right) \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x} \quad (x \neq 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 971. y &= \frac{b}{a}x + \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{th} \frac{x}{2}\right) \\ &\quad (0 \leq |b| < a). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{b}{a} + \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a-b}{a+b} \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}} \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{b}{a} + \frac{a^2 - b^2}{a(b + a\operatorname{ch} x)} = \frac{a + b\operatorname{ch} x}{b + a\operatorname{ch} x}. \end{aligned}$$



972. 引入中间变量  $u = \cos^2 x$  求函数

$$y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$$

的导函数.

解  $u = \cos^2 x, y = \ln(u + \sqrt{1 + u^2}),$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x,$$

而

$$y'_u = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^4 x}},$$

$$u'_x = -2\cos x \sin x = -\sin 2x,$$

于是,

$$y'_x = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^4 x}}.$$

利用 972 题所示的方法, 求下列函数的导函数:

$$973^+. y = (\arccos x)^2 \left[ \ln^2(\arccos x) - \ln(\arccos x) + \frac{1}{2} \right].$$

解 设  $u = \arccos x$ , 则  $y = u^2 \left( \ln^2 u - \ln u + \frac{1}{2} \right).$

由于

$$\begin{aligned} y'_u &= 2u \left( \ln^2 u - \ln u + \frac{1}{2} \right) + u^2 \left( \frac{2\ln u}{u} - \frac{1}{u} \right) \\ &= 2u \ln^2 u = 2\arccos x \cdot \ln^2(\arccos x), \end{aligned}$$

$$u'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

于是,

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_u \cdot u'_x = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x \\ &\quad \cdot \ln^2(\arccos x) \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

$$974^+. y = \frac{1}{2} \arctg(\sqrt[4]{1+x^4}) + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + 1}{\sqrt[4]{1+x^4} - 1}.$$

解 设  $u = \sqrt[4]{1+x^4}$ , 则

$$y = \frac{1}{2} \arctg u + \frac{1}{4} \ln \frac{u+1}{u-1}.$$

由于

$$\begin{aligned} y'_u &= \frac{1}{2(1+u^2)} + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} \right) \\ &= \frac{1}{1-u^4} = -\frac{1}{x^4}, \end{aligned}$$

$$u'_x = \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}},$$

于是,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = -\frac{1}{x \sqrt[4]{(1+x^4)^3}} \quad (x \neq 0).$$

$$975. y = \frac{e^{-x^2} \arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}} + \frac{1}{2} \ln(1-e^{-2x^2}).$$

解 设  $u = e^{-x^2}$ , 则

$$y = \frac{u \arcsin u}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{1}{2} \ln(1-u^2).$$

由于

$$\begin{aligned} y'_u &= \frac{\left( \arcsin u + \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) \sqrt{1-u^2} + \frac{u^2 \arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2} \\ &\quad - \frac{u}{1-u^2} \\ &= \frac{\arcsin u}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

$$u'_x = -2xe^{-x^2},$$

于是,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{-2xe^{-x^2} \arcsin(e^{-x^2})}{(1 - e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}}$$

$$(x \neq 0).$$

976.  $y = \frac{a^x}{1 + a^{2x}} - \frac{1 - a^{2x}}{1 + a^{2x}} \arcsin(a^{-x}).$

解 设  $u = a^x$ , 则

$$y = \frac{u}{1 + u^2} - \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \arcsin(u^{-1}).$$

由于

$$\begin{aligned} y'_u &= \frac{(1 + u^2) - 2u^2}{(1 + u^2)^2} \\ &\quad - \frac{2u(1 + u^2) - 2u(1 - u^2)}{(1 + u^2)^2} \arcsin(u^{-1}) \\ &\quad - \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \cdot \frac{1}{u^2 \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)} \\ &= \frac{4u \arcsin(u^{-1})}{(1 + u^2)^2} = \frac{4a^x \cdot \arcsin(a^{-x})}{(1 + a^{2x})^2}, \end{aligned}$$

$$u'_x = a^x \ln a,$$

于是,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{4a^{2x} \ln a}{(1 + a^{2x})^2} \arcsin(a^{-x})$$

$$(a > 0).$$

977. 求函数的导函数并作函数及导函数的图形, 设:

(a)  $y = |x|$ ; (b)  $y = x|x|$ ; (c)  $y = \ln|x|$ .

解 (a)  $y = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ -x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时.} \end{cases}$  (图 2.2).

$$y' = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时,} \\ -1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \end{cases} \text{或写成 } y' = \frac{|x|}{x}.$$

在  $x = 0$  时  $y'$  不存在(图 2.3).

$$(6) y = \begin{cases} x^2, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ -x^2, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad (\text{图 2.4}).$$

$$y' = \begin{cases} 2x, & \text{当 } x > 0 \text{ 时,} \\ -2x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad \text{而且易见有 } y'|_{x=0} = 0,$$

故  $y' = 2|x|$  (图 2.5).

\* ) 以下各题,对于分界点的导数,不再单独讨论.

$$(8) y = \ln|x| \quad (\text{图 2.6}).$$

$$y' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \quad (\text{图 2.7}).$$

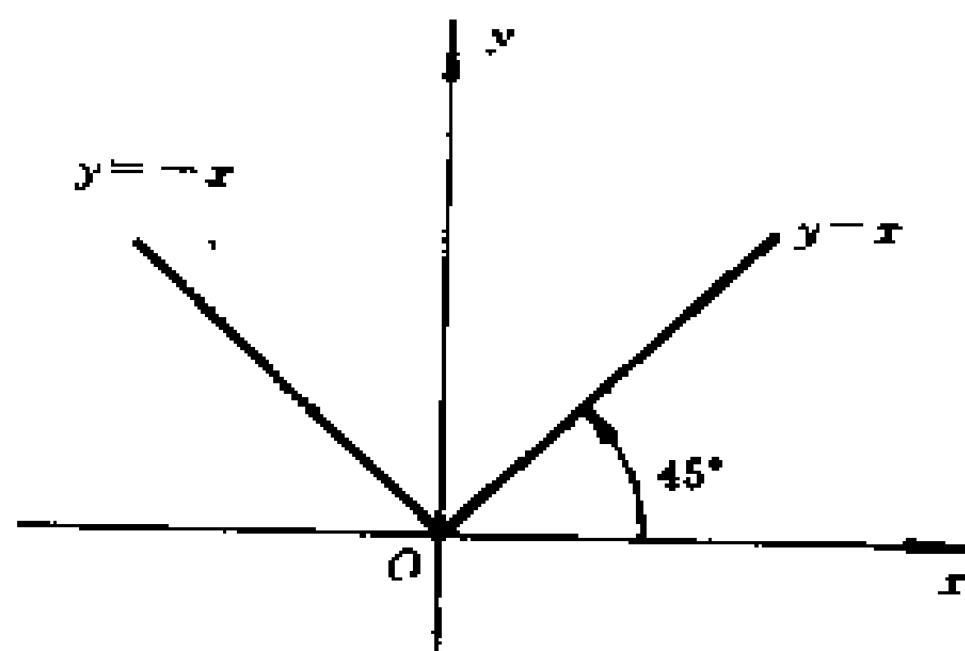


图 2.2

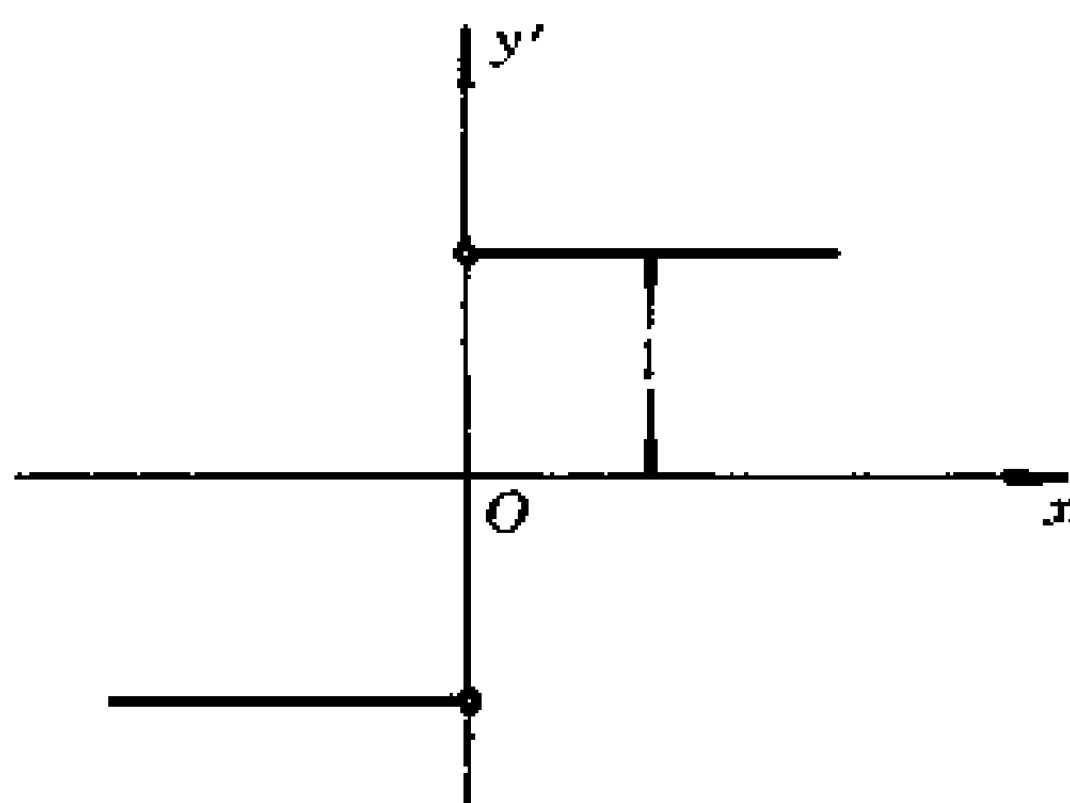


图 2.3

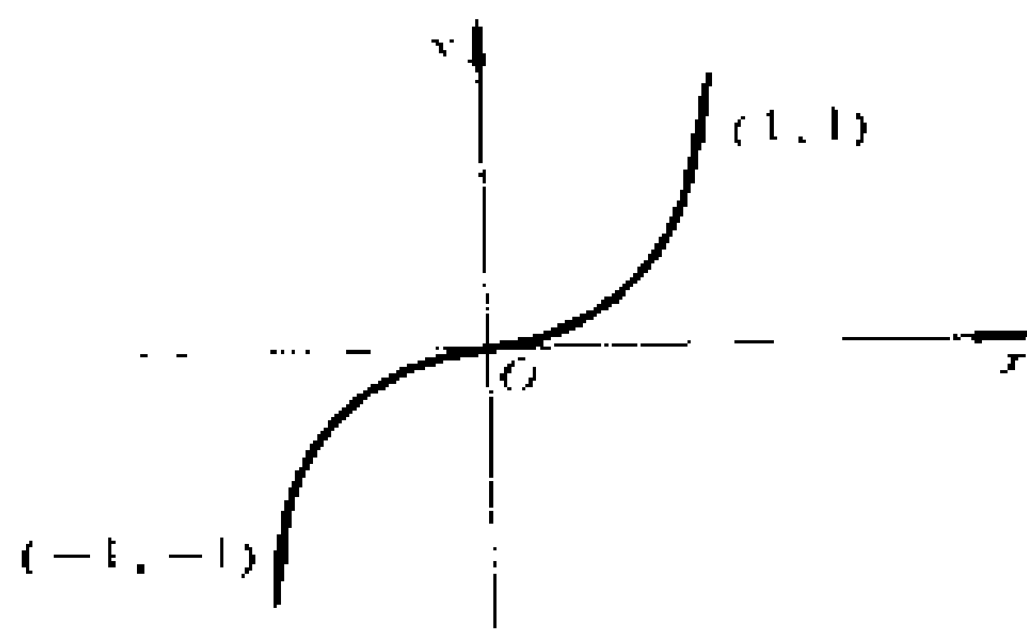


图 2.4

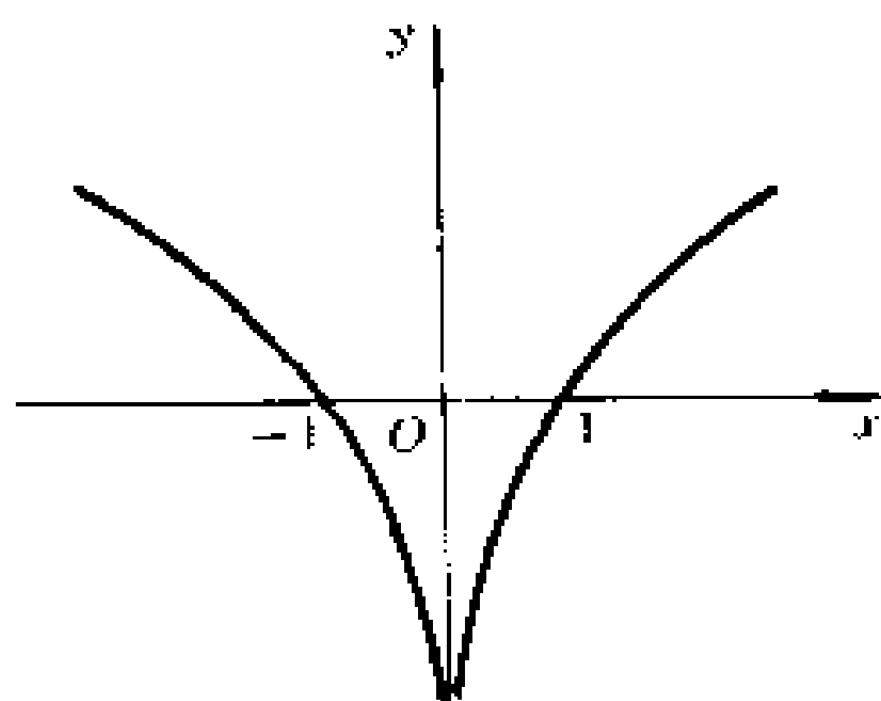


图 2.6

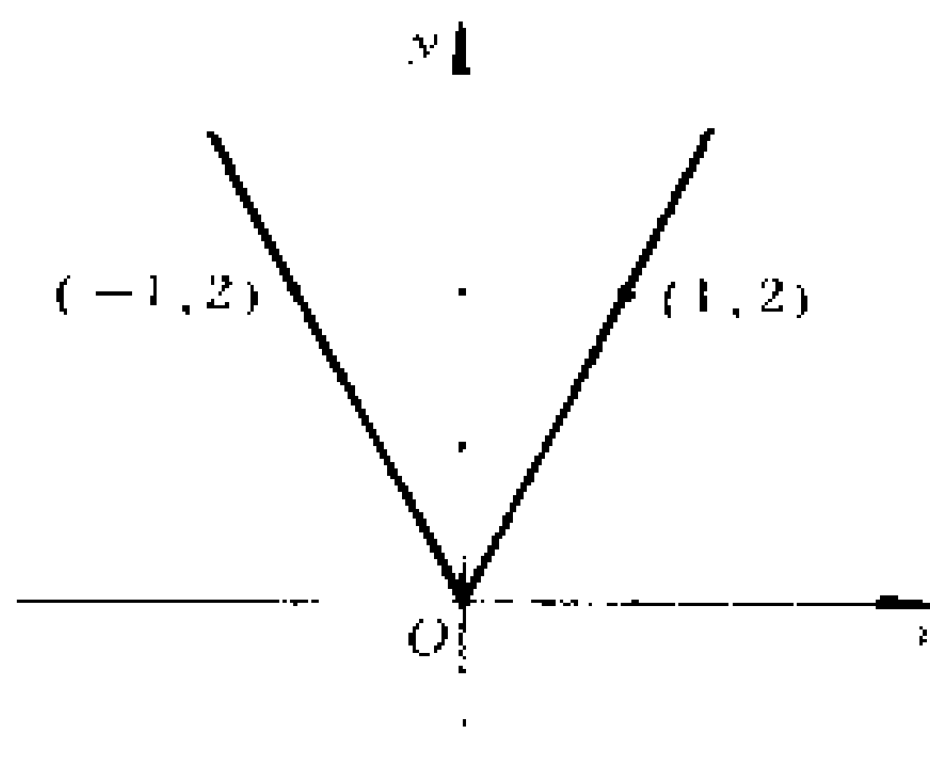


图 2.5

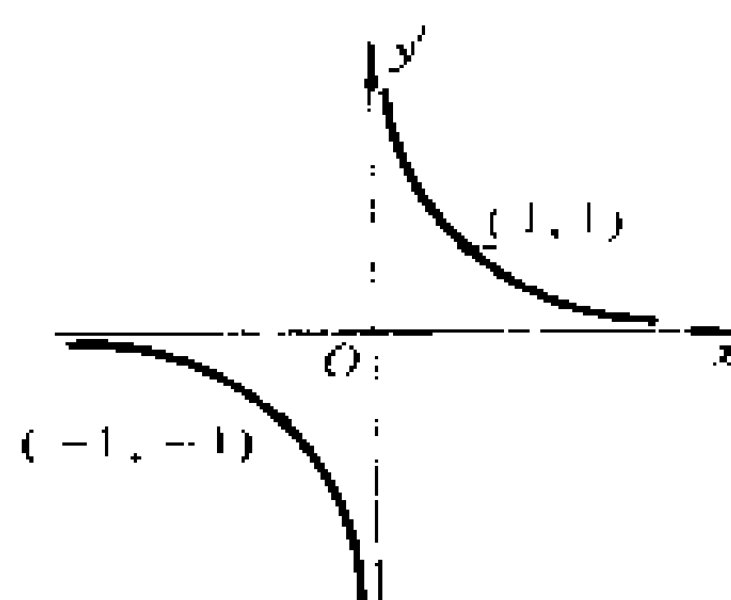


图 2.7

978. 求下列函数的导函数:

(a)  $y = |(x-1)^2(x+1)^3|$ ;      (б)  $y = |\sin^3 x|$ ;

(в)  $y = \arccos \frac{1}{|x|}$ ;      (г)  $y = [x] \sin^2 \pi x$ .

解 (a)  $y' = \frac{|(x-1)^2(x+1)|}{(x-1)^2(x+1)^3} [2(x-1)(x+1)^3 + 3(x-1)^2(x+1)^2]$   
 $= (x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$   
 $(|x| \neq 1);$

(b)  $y' = \frac{|\sin^3 x|}{\sin^3 x} 3\sin^2 x \cos x$   
 $= \frac{3}{2} \sin 2x |\sin x| \quad (x \neq k\pi, k \text{ 为整数});$

(c)  $y' = \left[ -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \right] \cdot \left( -\left( \frac{|x|}{x \cdot x^2} \right) \right)$   
 $= \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1);$

(r) 对于  $y = [x]$  有  $y' = 0$

$(x \neq k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$

于是, 当  $x \neq k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时, 有

$$\{[x] \sin^2 \pi x\}' = 2\pi \sin \pi x \cos \pi x \cdot [x]$$

$$= \pi [x] \sin 2\pi x.$$

容易直接验证当  $x = k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时上式也成立.

求导函数并作出函数及其导函数的图形:

979.  $y = \begin{cases} 1-x & \text{当 } -\infty < x < 1; \\ (1-x)(2-x) & \text{当 } 1 \leq x \leq 2; \\ -(2-x) & \text{当 } 2 < x < +\infty. \end{cases}$  (图 2.8)

解 显然  $y' = \begin{cases} -1 & \text{当 } -\infty < x < 1; \\ 2x-3 & \text{当 } 1 < x < 2; \\ 1 & \text{当 } 2 < x < +\infty. \end{cases}$

$$\text{解 } y' = \begin{cases} 2(x-a)(x-b)(2x-a-b), & \text{当 } x \in [a, b]; \\ 0, & \text{当 } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

(图 2.11)

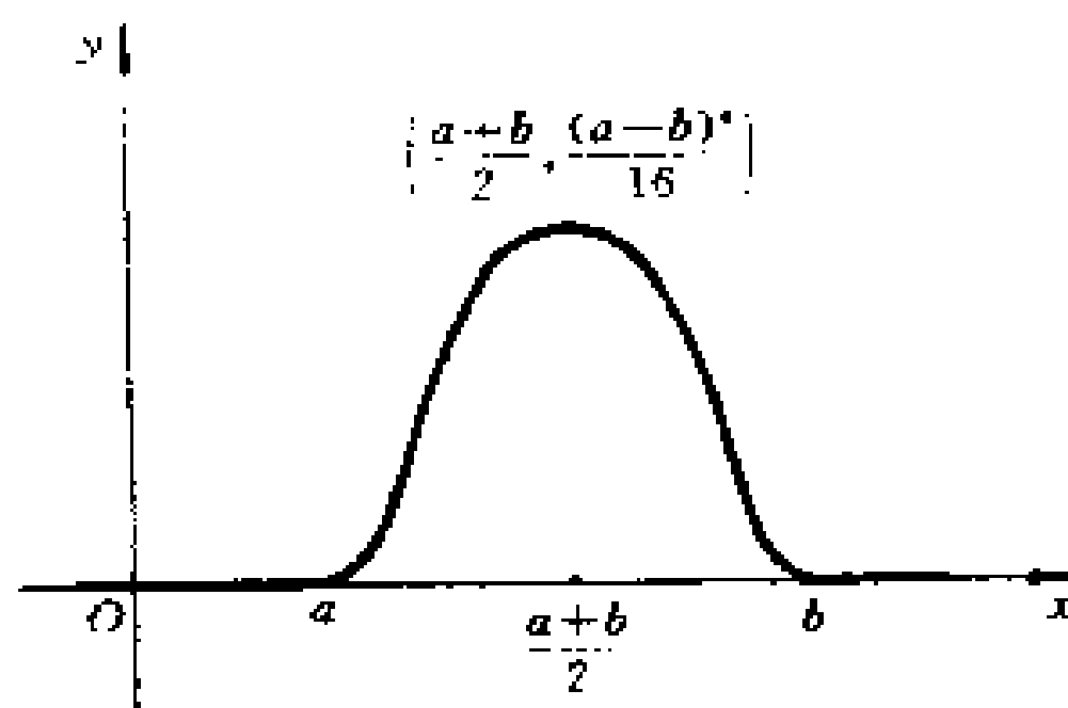


图 2.10

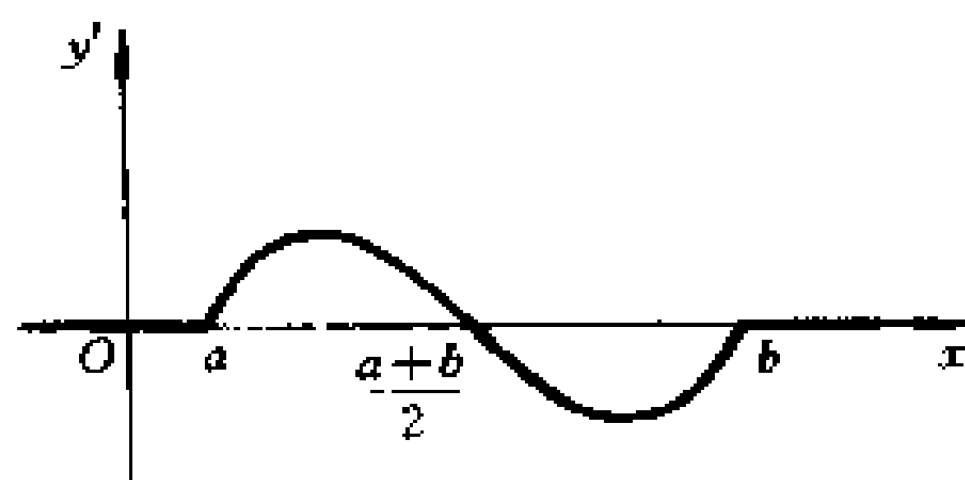


图 2.11

$$981. y = \begin{cases} x & \text{当 } x < 0; \\ \ln(1+x) & \text{当 } x \geq 0. \end{cases} \quad (\text{图 2.12})$$

$$\text{解 } y' = \begin{cases} 1 & \text{当 } x < 0; \\ \frac{1}{1+x} & \text{当 } x \geq 0. \end{cases} \quad (\text{图 2.13})$$

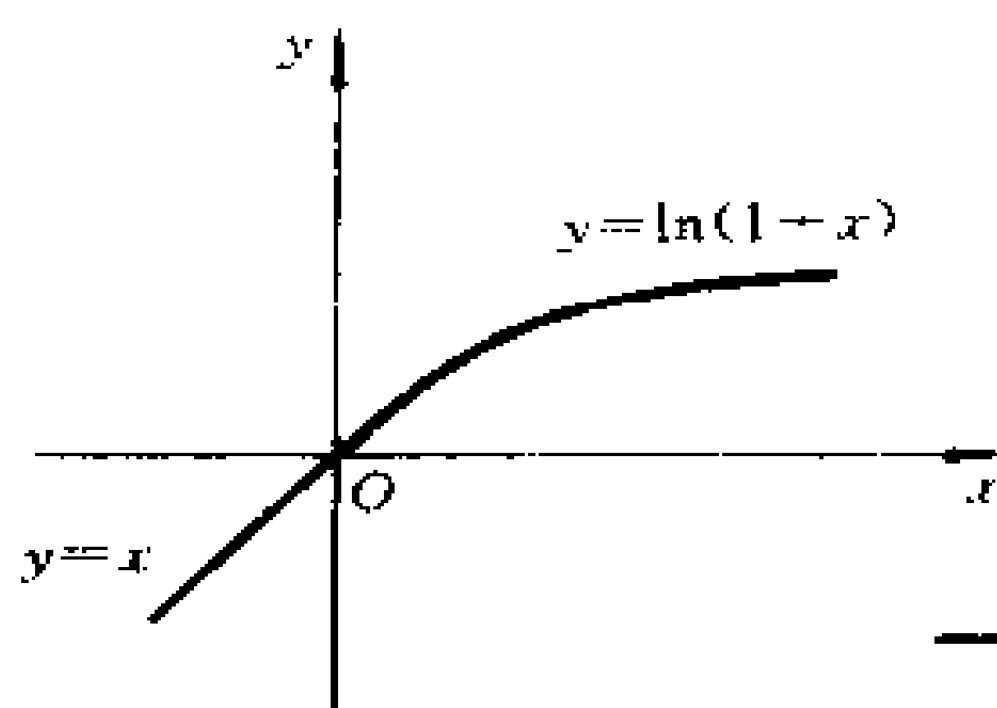


图 2.12

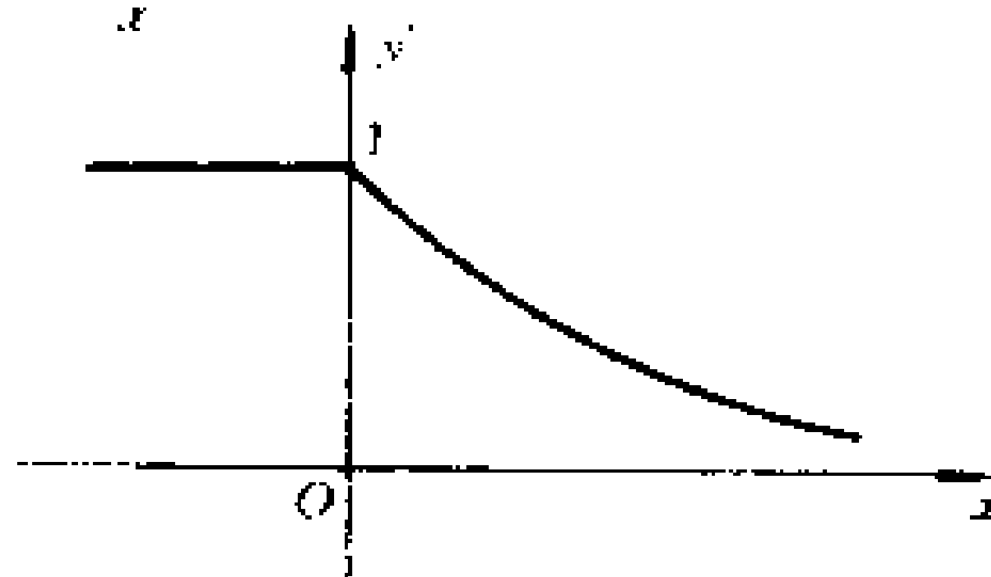


图 2.13

$$982. y = \begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x, & \text{当 } |x| \leq 1; \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2} & \text{当 } |x| > 1. \end{cases} \quad (\text{图 2.14})$$

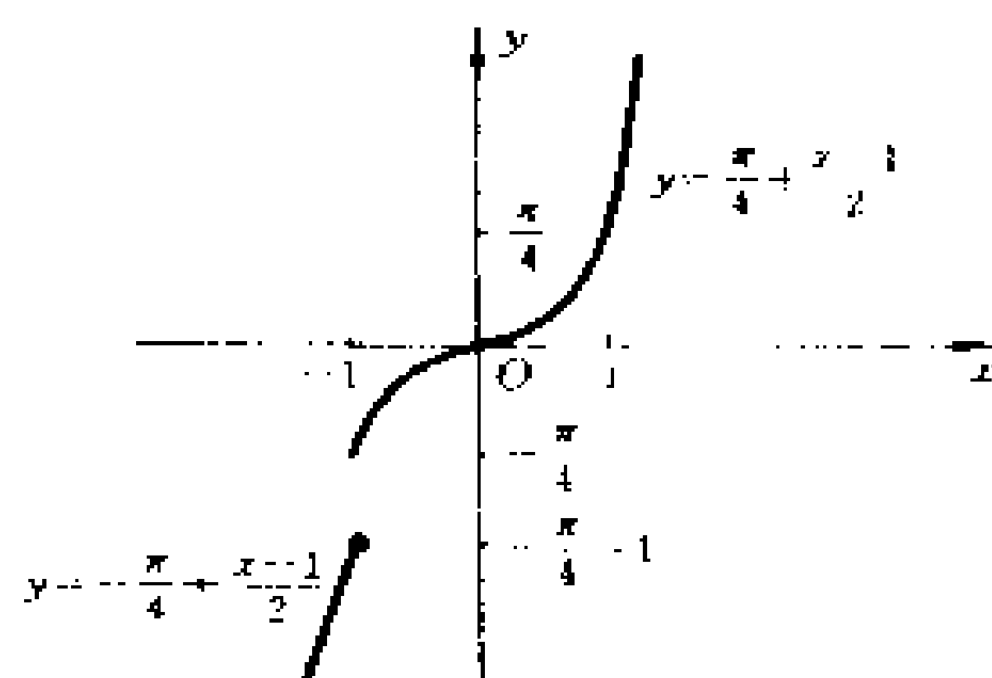


图 2.14



$$\text{解 } y = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{当 } -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{当 } |x| > 1. \end{cases} \quad (\text{图 2.15})$$

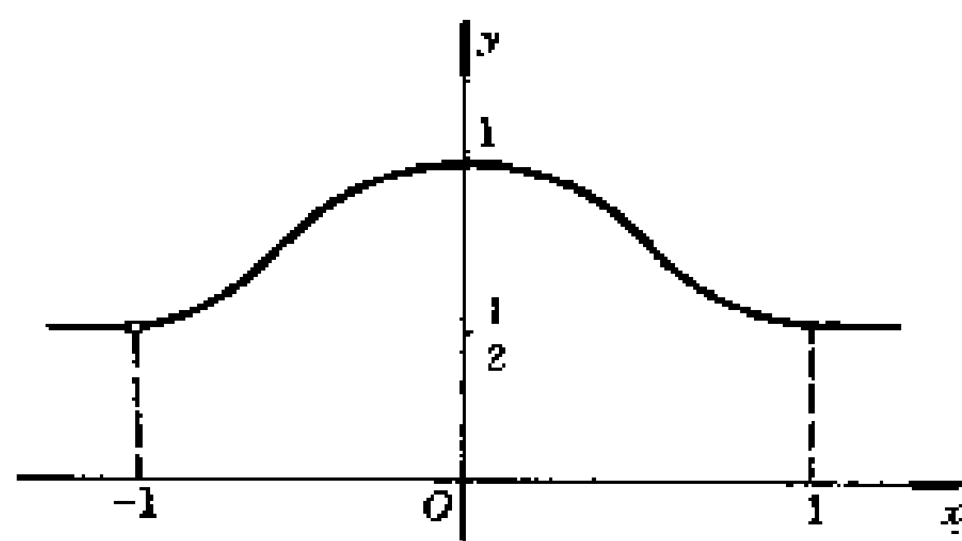


图 2.15

$$983. y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{当 } |x| \leq 1; \\ \frac{1}{e} & \text{当 } |x| > 1. \end{cases} \quad (\text{图 2.16})$$

$$\text{解 } y = \begin{cases} 2xe^{-x^2}(1-x^2) & \text{当 } |x| \leq 1; \\ 0 & \text{当 } |x| > 1. \end{cases} \quad (\text{图 2.17})$$

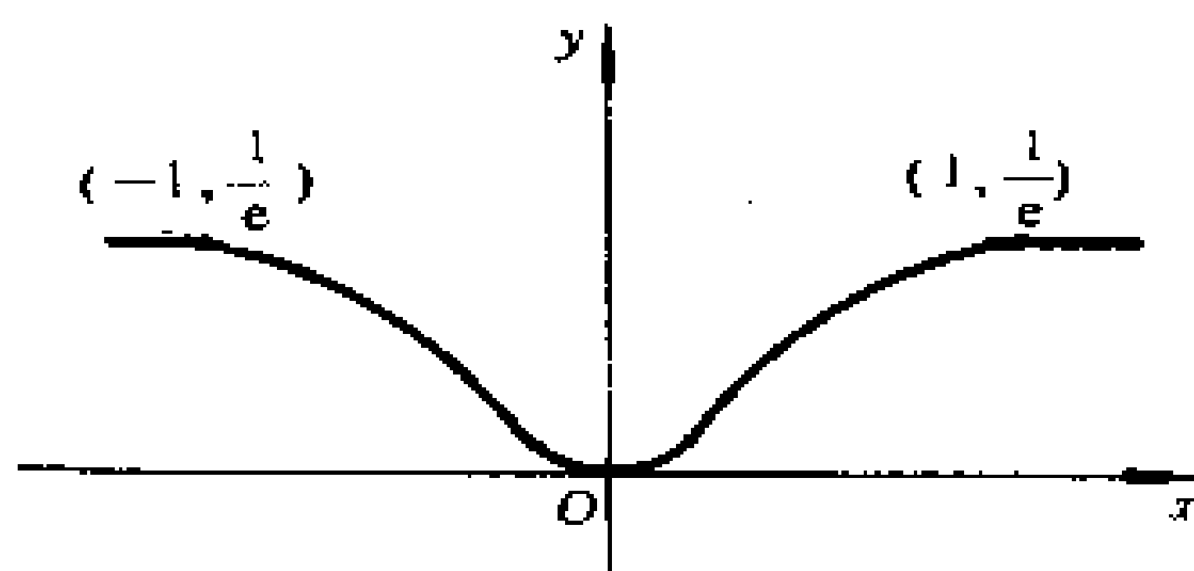


图 2.16

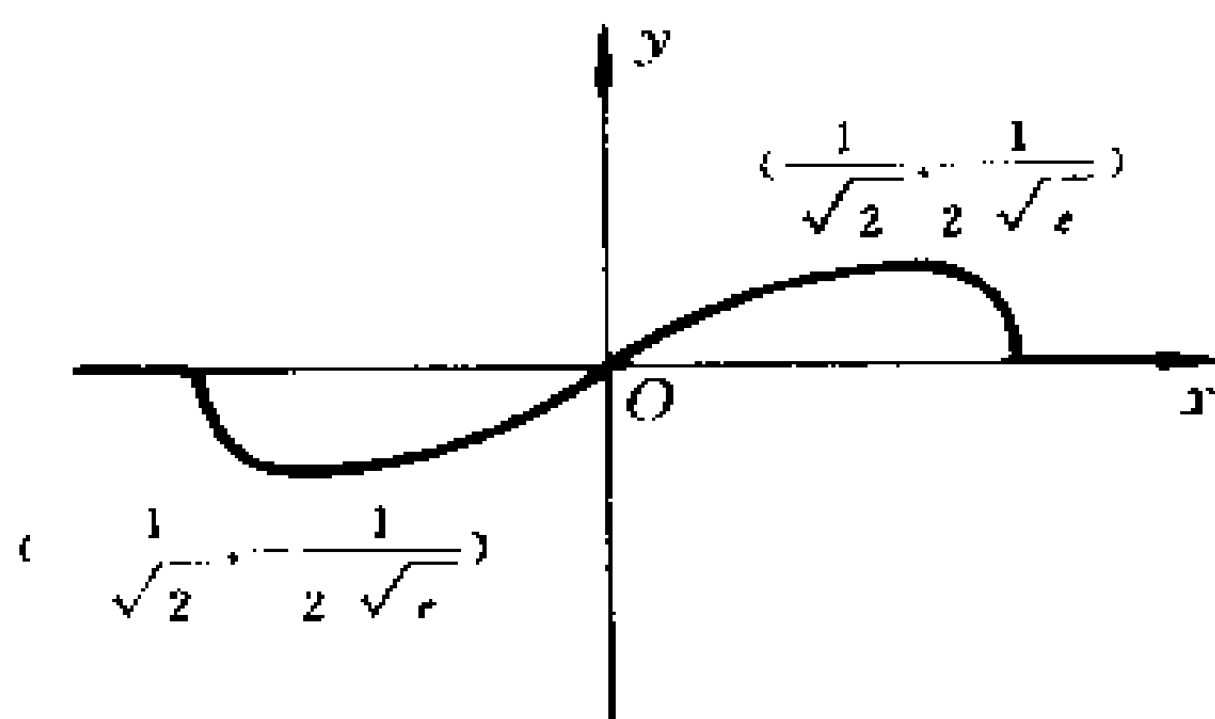


图 2.17

984. 由已知函数的对数得来的导函数称为此函数的对数的导函数：

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

已知函数  $y$ , 求其对数的导函数：

$$(a) y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; (b) y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}};$$

$$(B) y = (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \cdots (x - a_n)^{\alpha_n};$$

$$(r) y = (x + \sqrt{1+x^2})^n.$$

**解** (a) 由  $y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  得

$$\ln y = \ln |x| + \frac{1}{2} \ln |1-x| - \frac{1}{2} \ln |1+x|,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln y &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)} \\ &= \frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)} (0 < |x| < 1); \end{aligned}$$

(f) 由  $y = \frac{x^2}{1-x} - \sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$  得

$$\ln y = 2\ln|x| - \ln|1-x| + \frac{1}{3}\ln|3-x| - \frac{2}{3}\ln|3+x|,$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln y &= \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3(3-x)} \\ &\quad - \frac{2}{3(3+x)} \\ &= \frac{54 - 36x + 4x^2 + 2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)} \\ &\quad (x \neq 0, x \neq 1, |x| \neq 3);\end{aligned}$$

(g) 由于  $y = \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{\alpha_i}$  及  $y$  在对数符号内, 故应设

$$\prod_{i=1}^n (x - a_i)^{\alpha_i} > 0, \text{ 从而有}$$

$$\ln y = \ln \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{\alpha_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln|x - a_i|,$$

得

$$\frac{d}{dx}\ln y = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x - a_i} \quad (x \in R),$$

$$\text{其中 } R = \left\{ x \mid \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{\alpha_i} > 0 \right\};$$

(r) 由  $y = (x + \sqrt{1+x^2})^n$  得

$$\begin{aligned}\ln y &= n \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \\ \frac{d}{dx}\ln y &= \frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

985. 设  $\varphi(x)$  及  $\psi(x)$  为  $x$  的可微分函数, 求函数  $y$  的导函数,

若:

$$(a) y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}; (b) y = \arctg \frac{\varphi(x)}{\psi(x)};$$

$$(c) y = {}^{\varphi(x)}\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)} \quad [\varphi(x) \neq 0, \psi(x) > 0];$$

$$(r) y = \lg_{\varphi(x)} \psi(x) \quad [\varphi(x) > 0, \psi(x) > 0].$$

解 (a)  $y' = \frac{\varphi(x)\varphi'(x) + \psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}}$   
 $[\varphi^2(x) + \psi^2(x) \neq 0].$

$$(b) y' = \frac{1}{1 + \frac{\varphi^2(x)}{\psi^2(x)}} \cdot \frac{\psi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\varphi(x)}{\psi^2(x)}$$

$$= \frac{\psi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\varphi(x)}{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$$

$$(\psi(x) \neq 0).$$

(c) 由  $y = {}^{\varphi(x)}\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$  得

$$\ln y = \frac{1}{\varphi(x)} \ln \psi(x),$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \varphi(x) - \varphi'(x) \ln \psi(x)}{\varphi^2(x)}$$

于是,

$$y' = {}^{\varphi(x)}\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)} \left\{ \frac{1}{\varphi(x)} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \ln \psi(x) \right\}.$$

(r) 由  $y = \lg_{\varphi(x)} \psi(x)$  得

$$y = \frac{\ln \psi(x)}{\ln \varphi(x)},$$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} \ln \phi(x) - \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} \ln \phi(x)}{\ln^2 \phi(x)} \\
 &= -\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} \cdot \frac{1}{\ln \phi(x)} \\
 &= -\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} \cdot \frac{\ln \phi(x)}{\ln^2 \phi(x)}.
 \end{aligned}$$

986. 求  $y'$ , 设:

$$(a) y = f(x^2); \quad (b) y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x);$$

$$(B) y = f(e^x) \cdot e^{f(x)}; \quad (r) y = f\{f[f(x)]\},$$

其中  $f(u)$  表示可微分的函数.

**解** (a)  $y' = 2xf'(x^2);$

$$\begin{aligned}
 (b) y' &= 2\sin x \cos x f'(\sin^2 x) \\
 &\quad - 2\sin x \cos x f'(\cos^2 x) \\
 &= \sin 2x [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)];
 \end{aligned}$$

$$(B) y' = e^{f(x)} [f'(x)f(e^x) + e^x f'(e^x)];$$

$$(r) y' = f'(x) \cdot f'[f(x)] \cdot f'\{f[f(x)]\}.$$

987. 证明  $n$  阶行列式微分法:

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) & \frac{d}{dx}f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}. \quad (1)$$

证 证法一：从行列式的定义出发予以证明.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} \\ &= \frac{d}{dx} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots \\ & \quad f_{nj_n}(x) \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} \frac{d}{dx} [f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots \\ & \quad \cdot f_{nj_n}(x)] \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} \sum_{i=1}^n f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots \\ & \quad \frac{d}{dx} f_{ij_i}(x) \cdots f_{nj_n}(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots \\ & \quad \frac{d}{dx} f_{ij_i}(x) \cdots f_{nj_n}(x) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) & \frac{d}{dx}f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

\* ) 其中  $N(j_1 j_2 \cdots j_n)$  表示排列  $j_1 j_2 \cdots j_n$  的逆序数.

$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$  表示对  $1, 2, \cdots, n$  的所有排列  $j_1 j_2 \cdots j_n$  求和.

证法二: 利用数学归纳法予以证明.

由于

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} \\ &= \frac{d}{dx} [f_{11}(x)f_{22}(x) - f_{12}(x)f_{21}(x)] \\ &= \left[ \frac{d}{dx}f_{11}(x) \cdot f_{22}(x) - \frac{d}{dx}f_{12}(x) \cdot f_{21}(x) \right] \\ & \quad + \left[ \frac{d}{dx}f_{22}(x) \cdot f_{11}(x) - \frac{d}{dx}f_{21}(x) \cdot f_{12}(x) \right] \\ &= \begin{vmatrix} \frac{d}{dx}f_{11}(x) & \frac{d}{dx}f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} \\ & \quad + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ \frac{d}{dx}f_{21}(x) & \frac{d}{dx}f_{22}(x) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

知等式(1) 对于  $n = 2$  时成立.

今假定等式(1) 对于  $n = k$  时成立, 即

$$= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{k+i+1} \frac{d}{dx}$$

[illegible]

$$= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{k+j+i}.$$

[illegible]

$$+ f_{k+1,j}(x) \cdot \frac{d}{dx}$$

[illegible]







$$\begin{aligned}
F'(x) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \\
&\quad \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \\
&\quad \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x^2 + x + 9) + (x^2 - 1 + 4) + (x^2 - x + 3) \\
&= 3(x^2 + 5).
\end{aligned}$$

989. 设:

$$F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix},$$

求  $F'(x)$ .

$$\begin{aligned}
\text{解 } F'(x) &= \begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & 2 & 6x \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} + \\
&\quad \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \\
&= 0 + 0 + 6(2x^2 - x^2) = 6x^2.
\end{aligned}$$

990. 已知函数的图形, 近似地作出其导函数的图形.

**解** 先由给定曲线  $y = f(x)$  上一点  $M$ , 作出曲线  $y' = f'(x)$  上的对应点  $M'$ . 为清楚起见, 作两个坐标系  $Oxy$  及  $O'x'y'$ , 取相同的单位,  $x$  轴与  $x'$  轴平行,  $y$  轴及  $y'$  轴平行且在同一条直线上(如图 2.18).

在  $Oxy$  系内画出曲线  $y = f(x)$ , 在曲线上任取一点  $M(x, f(x))$ , 并作曲线在点  $M$  处的切线  $MN$ . 过  $O'x'y'$  系内的点  $P(-1, 0)$  作平行  $MN$  的直线  $PQ$  交  $y'$  轴于点  $Q$ , 于是

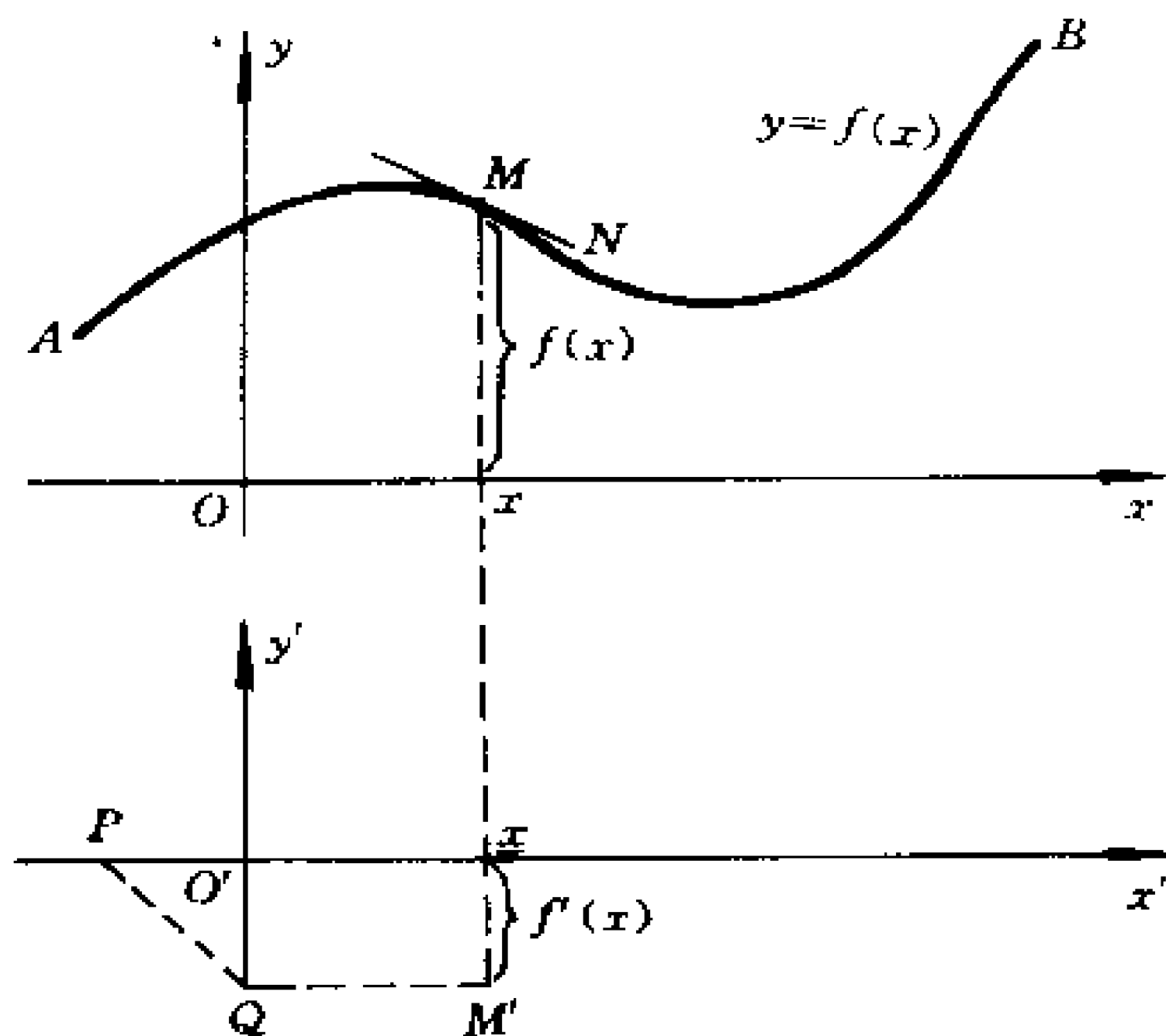


图 2.18

$$O'Q = \operatorname{tg} \alpha = f'(x),$$

即线段  $O'Q$  是对应于在点  $x$  的导函数  $f'(x)$ . 再过点  $Q$  引平行  $x$  轴的直线, 交过点  $(x, 0)$  且垂直于  $x$  轴的直线于点  $M'$ , 则点  $M'$  就是曲线  $y' = f'(x)$  上对应于曲线  $y = f(x)$  上点  $M$  的点.

由此, 我们就可由已给曲线  $y = f(x)$  作出曲线  $y' = f'(x)$ , 按上述方法, 在曲线  $y = f(x)$  上取若干点:

$$M_i(x_i, f(x_i)) (i = 1, 2, \dots, n),$$

且在  $Oxy'$  系 (相当于  $O'x'y'$  系, 这是为了方便起见, 分开画) 内作出对应点:

$$M'_i(x_i, f'(x_i)) (i = 1, 2, \dots, n).$$

最后用光滑曲线连接  $M'_1, M'_2, \dots, M'_n$  各点, 此即已给曲线  $y = f(x)$  对应的导函数  $y' = f'(x)$  的图形, 如图 2.19 所示.

### 991. 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{当 } x \neq 0; \\ 0 & \text{当 } x = 0. \end{cases}$$

有不连续的导函数.

证 当  $x \neq 0$  时,

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

而

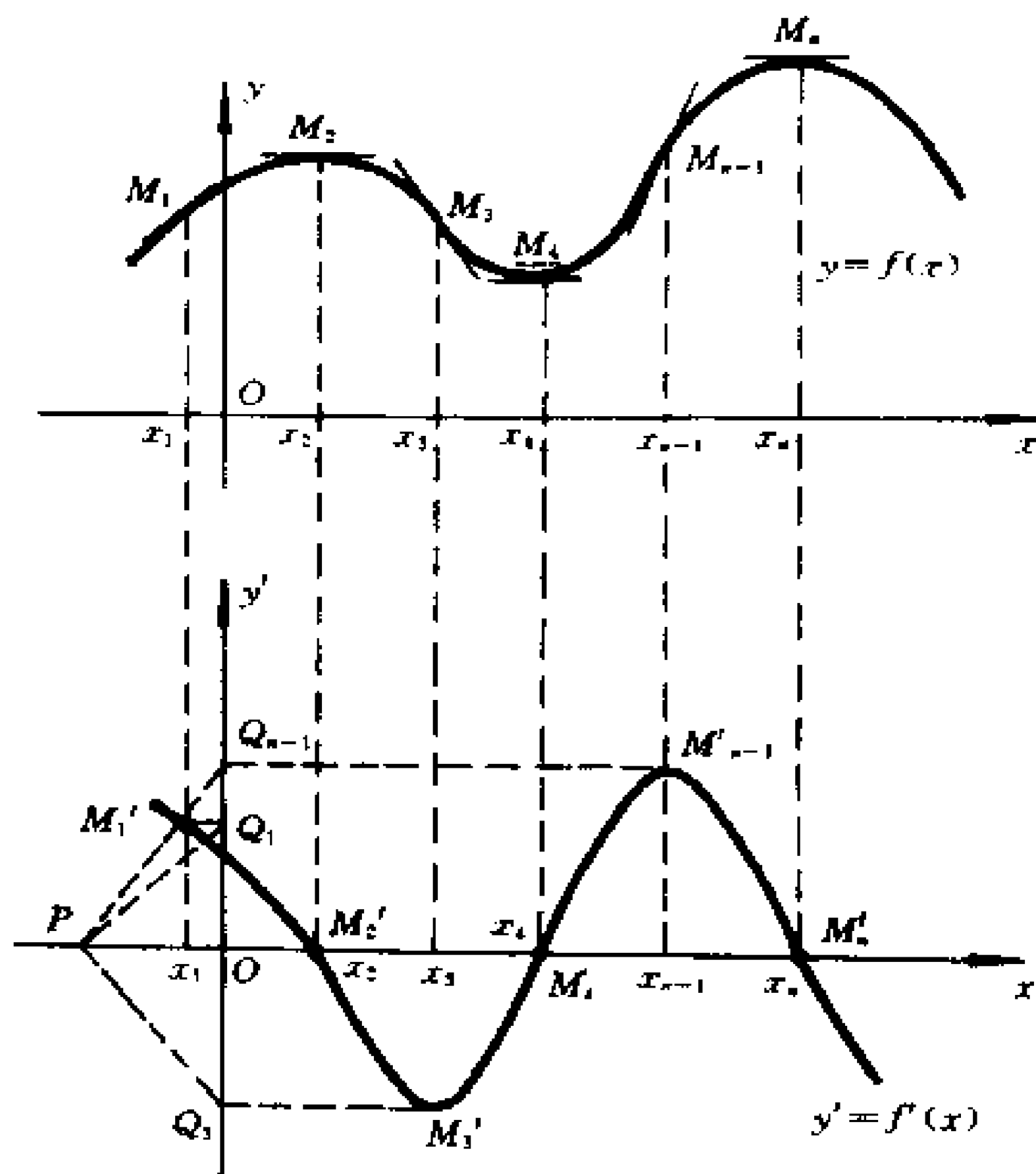


图 2.19

$$\begin{aligned}
 f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

故  $f'(x)$  在  $-\infty < x < +\infty$  中处处存在, 但当  $x \rightarrow 0$  时,  $f'(x)$  并不趋向于任何极限, 所以  $f'(x)$  在点  $x = 0$  处是间断的, 这就说明了  $f(x)$  有不连续的导函数.

992. 在甚么条件下函数

$$f(x) = x^n \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0$$

(a) 在  $x = 0$  处是连续的; (b) 在  $x = 0$  处可微分;

(B) 在  $x = 0$  处其导函数是连续的?

**解** (a) 当  $n > 0$  时

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \frac{1}{x} = 0,$$

于是,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , 此时,  $f(x)$  在  $x = 0$  处是连续的

(当  $n = \frac{p}{q}$  ( $p, q$  互质) 且  $q$  为偶数时, 只考虑在  $x = 0$  处右连续).

(6) 当  $n > 1$  时

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{n-1} \sin \frac{1}{\Delta x} = 0, \end{aligned}$$

于是,  $f'(0) = 0$ , 即  $f(x)$  在  $x = 0$  处是可微的;

(B) 当  $n > 2$  时, 由于

$$f(x) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$$

而由(6)可得  $f'(0) = 0$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$ . 这就说

明当  $n > 2$  时,  $f(x)$  在  $x = 0$  处是连续的.

993. 在甚么条件下函数

$$f(x) = |x|^n \sin \frac{1}{|x|^m} \quad (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0$$

$$(m > 0)$$

有 (a) 于坐标原点的邻域上有有界的导函数;

(6) 在此域上有无界的导函数.

解 (a) 当  $x \neq 0, x \in (-\delta, \delta) (\delta > 0)$  时,

$$\begin{aligned} f'(x) &= n|x|^{n-1} \frac{|x|}{x} \sin \frac{1}{|x|^m} \\ &\quad - \frac{m}{|x|^{m+1}} \cdot \frac{|x|}{x} \cdot |x|^n \cos \frac{1}{|x|^m} \\ &= \frac{|x|}{x} \left[ n|x|^{n-1} \sin \frac{1}{|x|^m} \right. \\ &\quad \left. - m|x|^{n-(m+1)} \cos \frac{1}{|x|^m} \right]. \end{aligned}$$

由于  $\frac{|x|}{x}, \sin \frac{1}{|x|^m}, \cos \frac{1}{|x|^m}$  均为有界函数, 于是当  $n \geq m+1$  时,  $f'(x)$  为有界函数 (易知此时  $f'(0) = 0$ ).

(6) 在此域上, 当  $n - (m+1) < 0$  (即  $n < m+1$ ) 时  $f'(x)$  无界. 另一方面, 同 992 题 (6) 一样, 当  $n > 1$  时  $f'(0)$  才存在, 因而所求的条件为

$$1 < n < m+1 \quad (m > 0).$$

994. 设:

$$f(x) = (x-a)\varphi(x),$$

其中函数  $\varphi(x)$  在  $x=a$  处是连续的, 求  $f'(a)$ .

$$\text{解} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \varphi(a+\Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(a+\Delta x),$$

由于  $\varphi(x)$  在  $x=a$  处连续, 故  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(a+\Delta x) = \varphi(a)$ . 于



$$y = f(x) = \sum_{k=1}^n |x - a_k|,$$

它在  $a_1, a_2, \dots, a_n$  点均连续,而在这些点均无导数.

997. 证明:函数

$$f(x) = x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| \quad (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0$$

在点  $x = 0$  的任何邻域上有不可微分的点,但在  $x = 0$  这点是可微分的.

作出此函数的略图.

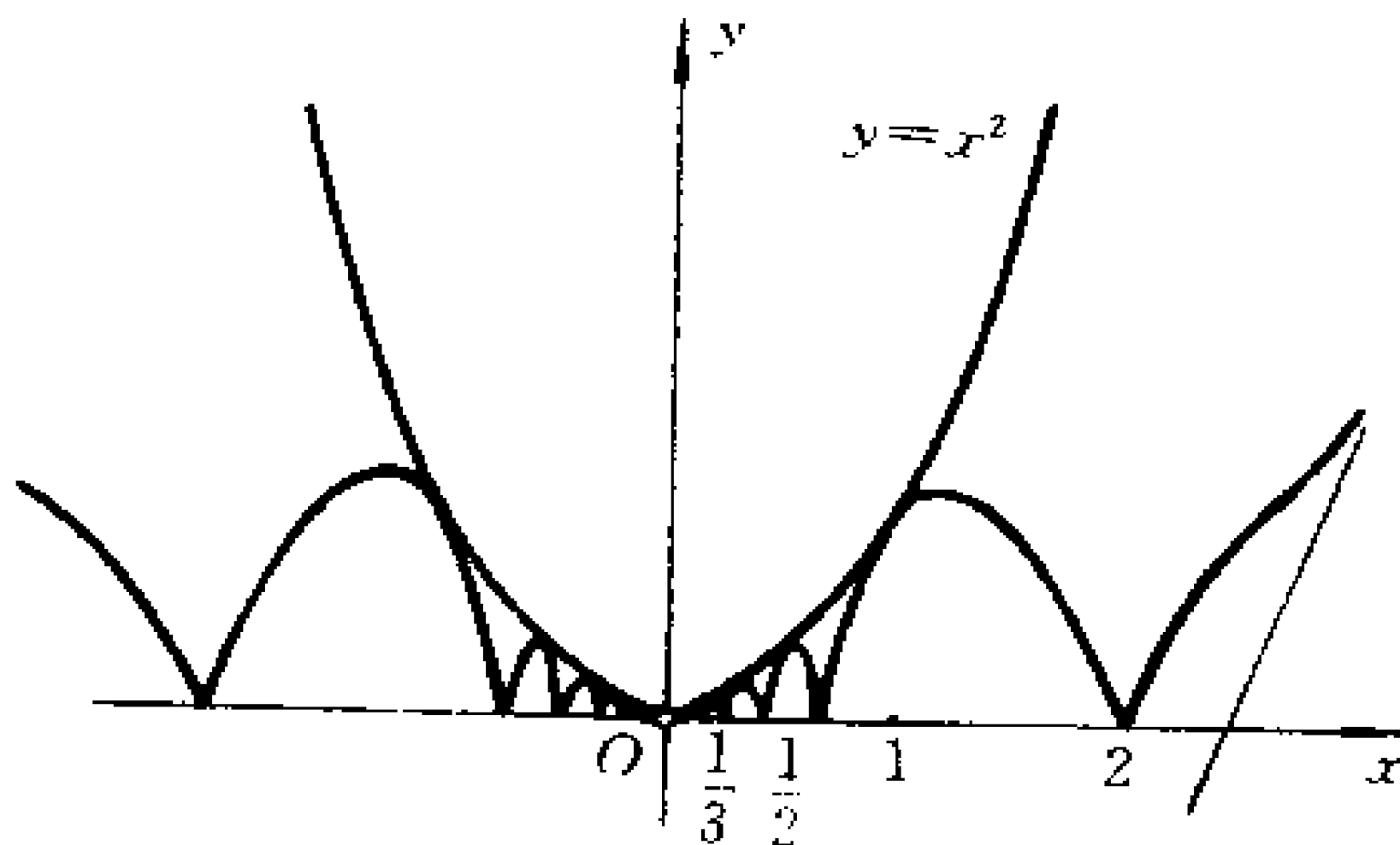


图 2.20

证 对于函数  $f(x)$ , 我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|}{x} = 0,$$

故  $f'(0) = 0$ , 即在  $x = 0$  处函数  $f(x)$  是可微的.

下面我们将指出对于  $x = 0$  的任何邻域  $(-\delta, \delta)$  (其

中  $\delta > 0$ ) 中, 函数  $f(x)$  总有不可微分的点. 事实上, 令

$$x_n = \frac{1}{n + \frac{1}{2}},$$

则当  $n$  充分大时, 总可使  $0 < x_n < \delta$ , 从而点  $x_n \in (-\delta, \delta)$ . 对于这样的点  $x_n$ , 有

$$f'_-(x_{2n}) = \pi \quad \text{及} \quad f'_+(x_{2n}) = -\pi.$$

所以

$$f'_-(x_{2n}) \neq f'_+(x_{2n}).$$

同法可得

$$f'_-(x_{2n+1}) \neq f'_+(x_{2n+1}).$$

于是, 函数  $f(x)$  在点  $x_n$  处不可微.

函数的图形全在  $Ox$  轴上方, 包括原点; 当  $x = \frac{2}{2n+1}$  时,  $f(x) = 0$ , 且  $f'(x)$  不存在. 此函数的略图如图 2.20 所示.

998. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

仅在  $x = 0$  时有导数.

证 
$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \begin{cases} \Delta x, & \text{当 } \Delta x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{当 } \Delta x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

于是, 有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 0.$$

即

$$f'(0) = 0.$$

其次,对于任一点  $x \neq 0$ ,分两种情形讨论函数的可微性:

(1)  $x$  为有理数. 取一无理数数列  $\{x_n\}$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , 则有

$$\lim_{x_n \rightarrow x} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \lim_{x_n \rightarrow x} \frac{0 - x^2}{x_n - x} = \infty.$$

由此可知,函数  $f(x)$  在任一有理点 ( $\neq 0$ ) 不可微.

(2)  $x$  为无理数. 取一异于零的有理数数列  $\{x_n'\}$ , 使  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n' = x$ , 则有

$$\lim_{x_n' \rightarrow x} \frac{f(x_n') - f(x)}{x_n' - x} = \lim_{x_n' \rightarrow x} \frac{x_n'^2}{x_n' - x} = \infty.$$

由此可知,函数  $f(x)$  在任一无理点也不可微.

综上所述,函数  $f(x)$  仅在  $x = 0$  时有导数.

999. 研究下列函数的可微性:

(a)  $y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|;$

(b)  $y = |\cos x|;$

(c)  $y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x;$

(d)  $y = \arcsin(\cos x);$

$$(e) y = \begin{cases} \frac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{当 } |x| \leq 1; \\ |x| - 1 & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$$

解 (a) 当  $x \neq 1$  或  $x \neq 2$  或  $x \neq 3$  时,函数均可微. 现在我们来考察在 1, 2, 3 这三点的可微性.

1. 当  $x = 1$  时, 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left| \frac{\Delta x}{\Delta x} \right| (\Delta x - 1)^2 (\Delta x - 2)^3|,$$

故  $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8, \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -8.$

因此  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  不存在, 由此可知  $y$  在  $x = 1$  点不可微;

2. 当  $x = 2$  时, 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x |(\Delta x + 1)(\Delta x - 1)^3|,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

因而  $y$  在  $x = 2$  点可微;

3. 当  $x = 3$  时, 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x |(\Delta x + 2)(\Delta x + 1)^2 \Delta x|,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

因而  $y$  在  $x = 3$  点可微.

(6)  $y = |\cos x|$  在  $x = \frac{2k-1}{2}\pi$  ( $k$  为整数) 点不可微分.

(B)  $y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x$  只可能在  $x = \pm \pi$  的点不可微分.

现在我们来考察在  $x = -\pi$  及  $x = \pi$  时函数  $y$  的可微性.

1. 当  $x = \pi$  时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\pi^2 - (\pi + \Delta x)^2| \sin^2(\pi + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\sin \Delta x \sin \Delta x |2\pi \Delta x + (\Delta x)^2|}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

所以函数  $y$  在  $x = \pi$  点可微.

2. 同理可证函数  $y$  在  $x = -\pi$  点也可微.

于是, 函数  $y = (\pi^2 - x^2) \sin^2 x$  处处可微分.

(r)  $y = \arcsin(\cos x)$  在  $|\cos x| = 1$  的点不可微分, 即在  $x = k\pi$  ( $k$  为整数) 的点不可微分.

(s) 函数  $y$  对于  $|x| \neq 1$  的点均可微. 现在我们来考虑函数  $y$  在  $|x| = 1$  点的可微性.

1. 当  $x = 1$  时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{1}{4}(\Delta x + 2)^2, & \text{当 } \Delta x < 0; \\ 1, & \text{当 } \Delta x > 0; \end{cases}$$

于是,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \text{ 及 } \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,$$

所以  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ , 即函数  $y$  在  $x = 1$  点可微.

2. 当  $x = -1$  时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$\begin{cases} \frac{|-1+\Delta x|-1}{\Delta x} = -1, & \text{当 } \Delta x < 0 \text{ 时,} \\ \frac{(-2+\Delta x)(\Delta x)^2}{4} = -\frac{1}{2}\Delta x + \frac{1}{4}(\Delta x)^2, & \text{当 } \Delta x > 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

于是,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 \text{ 及 } \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

所以函数  $y$  在  $x = -1$  点不可微分.

求函数  $f(x)$  左侧和右侧的导函数  $f'_-(x)$  和  $f'_+(x)$ .

设:

1000.  $f(x) = |x|$ .

**解** 当  $x \neq 0$  时, 易见

$$f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x,$$

当  $x = 0$  时,

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \text{当 } \Delta x < 0 \text{ 时;} \\ 1, & \text{当 } \Delta x > 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

所以,

$$f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1.$$

1001.  $f(x) = [x] \sin \pi x$ .

**解** 当  $x \neq$  整数时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \pi [x] \cos \pi x;$$

当  $x$  为整数时, 从定义出发得

$$\begin{aligned} f'_+(k) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{[k + \Delta x] \sin \pi(k + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{k \cos k\pi \sin(\pi \Delta x)}{\Delta x} \\ &= k\pi(-1)^k, \end{aligned}$$

同法可得  $f'_-(k) = \pi(k-1)(-1)^k$ .

1002.  $f(x) = x \left\lfloor \cos \frac{\pi}{x} \right\rfloor$  ( $x \neq 0$ ),  $f(0) = 0$ .

解 当  $x \neq \frac{2}{2k+1}$  ( $k$  为整数) 时 (即使  $\cos \frac{\pi}{x} \neq 0$  的  $x$  值),

$$\begin{aligned} f'_-(x) &= f'_+(x) \\ &= \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| + \frac{\pi}{x} \frac{\left| \cos \frac{\pi}{x} \right|}{\cos \frac{\pi}{x}} \sin \frac{\pi}{x} \\ &= \left( \cos \frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x} \right) \operatorname{sgn} \left( \cos \frac{\pi}{x} \right); \end{aligned}$$

当  $x = \frac{2}{2k+1}$  时, 从定义出发易得

$$\begin{aligned} f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right) &= -\frac{2k+1}{2}\pi, \\ f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right) &= \frac{2k+1}{2}\pi \quad (k \text{ 为整数}). \end{aligned}$$

1003.  $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$ .

解 当  $\sqrt{2k\pi} < |x| < \sqrt{(2k+1)\pi}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) 时,

$$f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$$

当  $x = 0$  时,

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\sin(\Delta x)^2}}{\Delta x} \\ &= 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \left[ -\sqrt{\frac{\sin(\Delta x)^2}{\Delta x^2}} \right] = -1. \end{aligned}$$

当  $x = \sqrt{2k\pi} (k = 1, 2, \dots)$  时, 我们有

$$\begin{aligned} f'_+(\sqrt{2k\pi}) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\sin(\sqrt{2k\pi} + \Delta x)^2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{\sin[2\Delta x \sqrt{2k\pi} + (\Delta x)^2]}{2\Delta x \sqrt{2k\pi} + (\Delta x)^2}} \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{2k\pi}}{\Delta x} + 1} \\ &= +\infty; \end{aligned}$$

同理, 可得

$$f'_-(\sqrt{2k\pi}) = -\infty (k = 1, 2, \dots);$$

$$f'_\mp(\sqrt{(2k+1)\pi}) = \mp\infty (k = 1, 2, \dots).$$

1004.  $f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$  ( $x \neq 0$ ),  $f(0) = 0$ .

**解** 当  $x \neq 0$  时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{(1 + e^{\frac{1}{x}})^2};$$

当  $x = 0$  时,

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}} = 0. \end{aligned}$$



$$1005. f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}.$$

解 当  $x \neq 0$  时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}};$$

当  $x = 0$  时,

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{1 - e^{-(\Delta x)^2}}}{\Delta x} \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \sqrt{\frac{1 - e^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}} = -1 \end{aligned}$$

同理可求得  $f'_-(0) = 1$ .

$$1006. f(x) = |\ln|x|| \quad (x \neq 0).$$

解 当  $|x| \neq 1$  时,

$$\begin{aligned} f'_-(x) = f'_+(x) &= \frac{|\ln|x||}{\ln|x|} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} \\ &= \frac{1}{x} \frac{|\ln|x||}{\ln|x|}, \end{aligned}$$

分两种情况:

1° 当  $0 < |x| < 1$  时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = -\frac{1}{x};$$

2° 当  $|x| > 1$  时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{1}{x};$$

当  $|x| = 1$  时,

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{1 + (1 + \Delta x)^2} \\ & \cdot \frac{1}{\Delta x} \\ & = 1. \end{aligned}$$

同理可求得

$$f'_-(-1) = -1, f'_+(1) = -1, f'_+(-1) = 1.$$

1008.  $f(x) = (x - 2)\arctan \frac{1}{x - 2} (x \neq 2), f(2) = 0.$

解 当  $x \neq 2$  时,

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'_+(x) \\ &= \arctan \frac{1}{x - 2} \\ &\quad + \frac{x - 2}{1 + \left(\frac{1}{x - 2}\right)^2} \left[-\frac{1}{(x - 2)^2}\right] \\ &= \arctan \frac{1}{x - 2} - \frac{x - 2}{(x - 2)^2 + 1}; \end{aligned}$$

当  $x = 2$  时,

$$\begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \arctan \frac{1}{\Delta x} = -\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

同理可求得  $f'_+(2) = \frac{\pi}{2}.$

1009. 证明: 在  $x \neq 0$  时函数  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ , 在  $x = 0$  时  $f(0) = 0$ , 在此点连续, 但在此点既无左侧导数, 又无右侧导数.

证 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

所以  $f(x)$  在  $x = 0$  点连续.

其次, 由于

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x},$$

不论  $\Delta x$  从左、右侧趋向于零, 此极限均不存在, 因此在点  $x = 0$ , 函数  $f(x)$  既无左侧导数, 也无右侧导数.

1010. 设:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \leq x_0; \\ ax + b, & \text{若 } x > x_0. \end{cases}$$

为了使函数  $f(x)$  于点  $x = x_0$  处连续而且可微分, 应当如何选取系数  $a$  和  $b$ ?

**解**  $f(x_0) = x_0^2 = f(x_0 - 0), f(x_0 + 0) = ax_0 + b.$   
当

$$x_0^2 = ax_0 + b$$

时, 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  连续. 又因  $f'_-(x_0) = 2x_0, f'_+(x_0) = a$ , 故当

$$a = 2x_0$$

时, 函数在点  $x_0$  处可微. 从而得

$$x_0^2 = 2x_0^2 + b,$$

即  $b = -x_0^2.$

于是, 所求的系数为

$$a = 2x_0, b = -x_0^2.$$

1011. 设:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \leq x_0; \\ ax + b, & \text{若 } x > x_0, \end{cases}$$

其中函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  为左方可微分的. 应当选择如何的系数  $a$  和  $b$ , 使函数  $F(x)$  在点  $x_0$  处连续而且可微分?

**解**  $F(x_0) = F(x_0 - 0) = f(x_0)$ ,

$F(x_0 + 0) = ax_0 + b$ . 当

$$f(x_0) = ax_0 + b$$

时, 函数  $F(x)$  在点  $x_0$  处连续. 又因  $F'_-(x_0) = f'_-(x_0)$ ,  $F'_+(x_0) = a$ , 故当

$$a = f'_-(x_0)$$

时, 函数  $F(x)$  在点  $x_0$  处可微分.

解方程组

$$\begin{cases} a = f'_-(x_0), \\ f(x_0) = ax_0 + b, \end{cases}$$

即得所求的系数为

$$a = f'_-(x_0), b = f(x_0) - x_0 f'_-(x_0).$$

1012. 适当地选定参数  $A$  与  $c$  用立方抛物线

$$y = A(x - a)(x - b)x - c$$

在区域  $a \leq x \leq b$  上把两个半直线:

$$y = k_1(x - a) \quad (-\infty < x < a)$$

及

$$y = k_2(x - b) \quad (b < x < +\infty)$$

光滑地连接起来.

**解** 对于立方抛物线,

$$y' = A[(x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)],$$

此即曲线上在任一点切线的斜率.

当接点处两条曲线的切线重合时, 它们就平滑地联接起来, 此时应有相等的斜率. 于是, 有

1°. 在点  $x = a$  处,

$$A(a-b)(a-c) = k_1; \quad (1)$$

2°. 在点  $x = b$  处,

$$A(b-a)(b-c) = k_2. \quad (2)$$

联立(1)和(2)式, 解之得

$$A = \frac{k_1 + k_2}{(b-a)^2}, c = \frac{ak_2 + bk_1}{k_1 + k_2}.$$

1013. 用抛物线  $y = a + bx^2$  ( $|x| \leq c$ ) (其中  $a$  与  $b$  为未知的参数) 去补充曲线  $y = \frac{m^2}{|x|}$  ( $|x| > c$ ) 的部分, 使所得的为一平滑曲线.

**解** 显见  $c > 0$ , 否则在点  $x = c$  处就不可能形成一平滑曲线. 此时, 在点  $x = c$  处两曲线的切线斜率相等, 且有相同的纵坐标. 于是, 有

$$(a + bx^2)' \Big|_{x=c} = \left( \frac{m^2}{|x|} \right)' \Big|_{x=c}$$

及

$$a + bc^2 = \frac{m^2}{c}.$$

从而得

$$\begin{cases} 2bc = -\frac{m^2}{c^2}, \\ a + bc^2 = \frac{m^2}{c}. \end{cases}$$

解之,得

$$a = \frac{3m^2}{2c}, b = -\frac{m^2}{2c^3}.$$

由曲线的对称性可知,在点  $x = -c$  处,按上述系数  $a$  与  $b$  所确定的曲线  $y = a + bx^2$  与曲线  $y = \frac{m^2}{|x|}$  也联成一平滑曲线.

1014. 若:(a) 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  有导数,而函数  $g(x)$  在这点没有导数;(6) 函数  $f(x)$  和  $g(x)$  二者在点  $x_0$  都没有导数,可否断定它们的和

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

在点  $x = x_0$  没有导数?

解 (a) 能. 因为

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x},$$

当  $\Delta x \rightarrow 0$ , 上式右端第一项的极限存在, 而第二项的极限不存在. 因而当  $\Delta x \rightarrow 0$ , 左端的极限也不存在 (否则差  $\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$  的极限就存在, 与  $g(x)$  不可导相矛盾), 这说明  $F(x)$  在点  $x_0$  没有导数.

(6) 不能. 例如,

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2}, g(x) = \frac{x - |x|}{2},$$

它们在点  $x = 0$  处都没有导数, 但它们的和  $F(x) =$

$f(x) + g(x) = x$  在点  $x = 0$  处有导数且为 1.

1015. 若: (a) 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  有导数, 而函数  $g(x)$  在此点没有导数; (6) 在点  $x_0$  函数  $f(x)$  和  $g(x)$  二者都没有导数, 可否断定他们的积

$$F(x) = f(x)g(x)$$

在点  $x = x_0$  没有导数?

**解** (a) 不能. 例如,

$f(x) = x$ , 在  $x = 0$  处有导数,

$g(x) = |x|$ , 在点  $x = 0$  没有导数,

而它们的积

$$F(x) = f(x)g(x) = x|x|$$

在点  $x = 0$  处有导数. 事实上,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x |\Delta x| - 0 \cdot |0|}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| = 0,\end{aligned}$$

即有  $F'(0) = 0$ .

(6) 不能. 例如,

$$f(x) = |x|, g(x) = |x|,$$

在点  $x = 0$  它们都没有导数, 但它们的积

$$F(x) = f(x)g(x) = (|x|)^2 = x^2,$$

在点  $x = 0$  处有导数, 且  $F'(0) = 2x|_{x=0} = 0$ .

1016. 若: (a) 函数  $f(x)$  于点  $x = g(x_0)$  有导数, 而函数  $g(x)$  于点  $x = x_0$  没有导数; (6) 函数  $f(x)$  于点  $x = g(x_0)$  没有导数, 而函数  $g(x)$  于点  $x = x_0$  有导数; (B) 函数  $f(x)$

于点  $x = g(x_0)$  没有导数及函数  $g(x)$  于点  $x = x_0$  没有导数, 则函数

$$F(x) = f[g(x)]$$

于已知点  $x = x_0$  的可微性怎样?

**解** (a)  $F'(x_0)$  可能存在, 也可能不存在. 例如, 考察函数  $f(x)$ 、 $g(x)$  及点  $x_0$  如下:

1°  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = |x|$ , 点  $x = 0$ ,  $g(0) = 0$ .  
 $f'(0) = 0$ ,  $g'(0)$  不存在; 而  $F(x) = f[g(x)] = (|x|)^2 = x^2$ ,  $F'(0) = 0$ . 这是  $F'(x_0)$  存在的一例.

2°  $f(x) = x$ ,  $g(x) = |x|$ , 点  $x = 0$ ,  $g(0) = 0$ .  
 $f'(0) = 1$ ,  $g'(0)$  不存在; 而  $F(x) = f[g(x)] = |x|$ ,  
 $F'(0)$  不存在. 这是  $F'(x_0)$  不存在的一例.

(b)  $F'(x_0)$  可能存在, 也可能不存在, 例如,

1°  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = x^2$ , 点  $x = 0$ ,  $g(0) = 0$ .  
 $f'(0)$  不存在,  $g'(0)$  存在, 且等于零; 而  $F(x) = f[g(x)] = |x^2| = x^2$ ,  $F'(0)$  存在, 且等于零.

2°  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = x$ , 点  $x = 0$ ,  $g(0) = 0$ .  
而  $F(x) = f[g(x)] = |x|$ ,  $F'(0)$  不存在.

(c)  $F'(x_0)$  可能存在, 也可能不存在, 例如,

1°  $f(x) = 2x + |x|$ ,  $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$ , 点  $x = 0$ ,  $g(0) = 0$ . 则  $f'(0)$  及  $g'(0)$  均不存在; 易知  $F(x) = f[g(x)] = 2\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|\right) + \left|\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|\right| = x$ .  
因此  $F'(0)$  存在且等于 1.



$2^\circ f(x) = |x|, g(x) = |x|$ , 点  $x = 0, g(0) = 0$ .  
 $f'(0)$  及  $g'(0)$  均不存在; 而  $F(x) = f[g(x)] = |x|$ ,  
 $F'(0)$  也不存在.

1017. 在函数

$$y = x + \sqrt[3]{\sin x}$$

的图形上哪些点处有垂直切线? 作出这图形.

解  $y' = 1 + \frac{\cos x}{3 \sqrt[3]{\sin^2 x}} (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \dots)$ .

当  $x = k\pi$  时, 容易直接算出

$$\begin{aligned} y' |_{x=k\pi} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k\pi + \Delta x + \sqrt[3]{\sin(k\pi + \Delta x)} - k\pi}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( 1 + \sqrt[3]{\frac{(-1)^k \cdot \sin \Delta x}{(\Delta x)^2} \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}} \right) \\ &= \infty, \end{aligned}$$

故当  $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  时有垂直切线.

当  $x = k\pi$  时,

$$y = k\pi;$$

当  $x = \frac{2k+1}{2}\pi$  时,

$$y = x \pm 1,$$

其图形如图 2.21 所示.

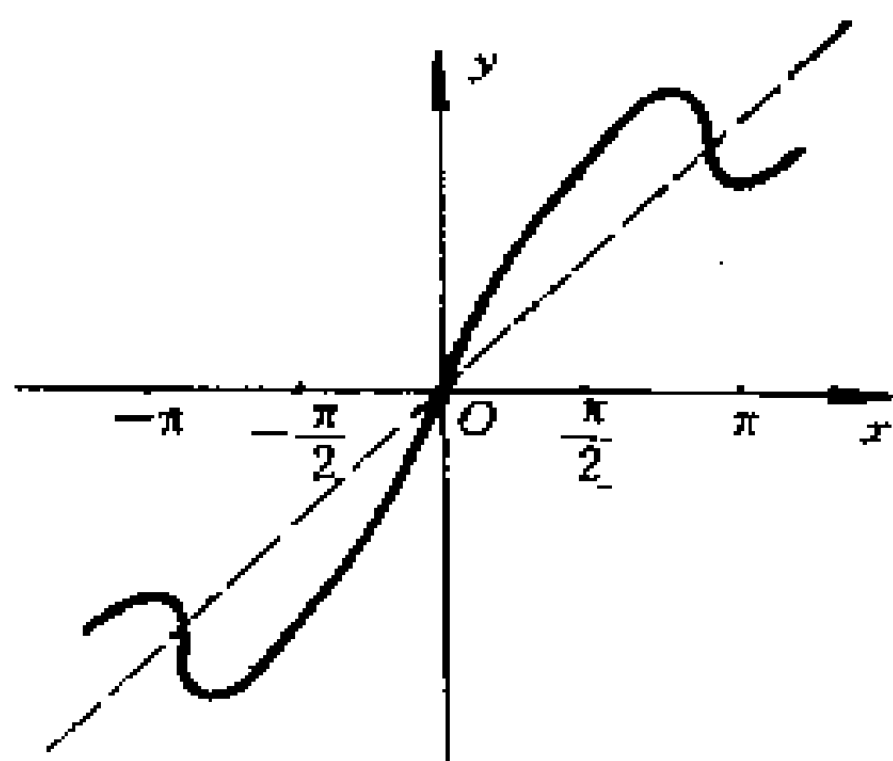


图 2.21

1018. 函数  $f(x)$  在其不连续点

可否有: (a) 有穷的导数; (6) 无穷的导数?

解 (a) 不能, 否则由此可推出其连续性.

(6) 能, 例如,

$$y = f(x) = \operatorname{sgn} x$$

它在  $x = 0$  点不连续, 但

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{|\Delta x|}{\Delta x}}{\frac{\Delta x}{\Delta x}} = \frac{1}{|\Delta x|} \rightarrow +\infty (\Delta x \rightarrow 0).$$

1019. 若函数  $f(x)$  于有限的区间  $(a, b)$  上可微分, 且

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty,$$

则是否必有

$$(1) \lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty; \quad (2) \overline{\lim}_{x \rightarrow a+0} |f'(x)| = +\infty?$$

解 (1) 一般地说, 不能保证  $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty$ . 例如, 对

于  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  内定义的函数

$$f(x) = \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x},$$

显然有  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$ , 但是,  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ ,

对于特殊的一串数  $x_n = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} (k = 1, 2, \dots)$  有

$f'(x_n) = 0$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = 0$ , 因而  $\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = \infty$  不成立.

(2) 必有  $\lim_{x \rightarrow a+0} |f'(x)| = \infty$ .

由于  $f(x)$  在  $(a, b)$  连续, 且  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ , 故  $f(x)$  在

$f(x_2) > M_1$ , 即点  $P_2 = (x_2, f(x_2))$  位于  $l$  线之上方.

另一方面, 由在  $x = B_0$  点  $f(x)$  的可微性, 在  $x = B_0$  右侧邻域内, 对于任给  $\epsilon_1 > 0$  (取  $\epsilon_1 < \frac{K}{2}$ ), 存在  $\delta$ , 使当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$\left| f'(B_0) - \frac{f(x) - f(B_0)}{x - B_0} \right| < \epsilon_1 < \frac{K}{2}.$$

于是, 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x) - f(B_0)}{x - B_0} \right| \\ & \leq |f'(B_0)| + \left| \frac{f(x) - f(B_0)}{x - x_0} - f'(B) \right| \\ & < K + \epsilon_1 < K + \frac{K}{2} = \frac{3}{2}K. \end{aligned}$$

即有在  $r$  曲线  $y = f(x)$  上: 当  $0 < |x - B_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - f(B_0)| < \frac{3}{2}K|x - B_0|, \quad (4)$$

今取  $x_1 > B_0$  使  $x_1 < x_2, x_1 < B_0 + \delta$ .

于是, 由(3)式和(4)式知

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(B_0) & < \frac{3}{2}K(x_1 - B_0) \\ & < 2K(x_1 - B_0) = Y(x_1) - f(B_0), \end{aligned}$$

故

$$f(x_1) < Y(x_1),$$

即点  $(x_1, f(x_1))$  位于直线  $l$  之下方.

考虑连续函数

$$G(x) = f(x) - Y(x),$$

我们取

$$c = \inf_{x \in [x_1, x_2]} \{x | G(x) > 0\},$$

则由  $G(x_1) < 0, G(x_2) > 0$ , 易见  $c$  是存在的, 而且  $G(c) = 0$ . 它也就是连续函数  $G(x)$  的一个中间值点.

考虑  $x_2 \geq x > c$ , 则有  $G(x) > 0$ , 即在  $c$  点附近且  $x > c$  时, 有

$$f(x) > Y(x),$$

从而

$$f(x) - f(c) > Y(x) - f(c) = Y(x) - Y(c),$$

注意  $x - c > 0$ , 故又有 (当  $x > c$ , 且在  $c$  附近时):

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > \frac{Y(x) - Y(c)}{x - c}.$$

上式两边取极限 (让  $x \rightarrow c + 0$ ), 并注意到函数的可微性, 有  $f'(c + 0) = f'(c)$ , 于是有

$$f'(c) \geq Y'(c) = 2K.$$

此处  $c \in (x_1, x_2) \subset [B_0, B)$ , 这个不等式与  $|f'(x)| \leq K$  式相抵触. 因此  $f'(x)$  当  $x \in [B_0, B)$  时是无界的. 这就完成了 (2) 的证明, 从而命题得证.

注. 若利用以后的拉格朗日定理, 则可很简单地证明此结论.

1020. 若函数  $f(x)$  于有限的区间  $(a, b)$  上可微分且

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty,$$

是否必有

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty?$$

解 不一定. 例如:

$$f(x) = \sqrt[3]{x},$$

它在  $(0, b)$  ( $b > 0$ ) 上可微分, 且  $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = +\infty,$$

然而

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x} = 0.$$

1021. 设函数  $f(x)$  在区间  $(x_0, +\infty)$  上可微分且有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

存在. 由此能否推出  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  存在?

解 不能. 例如, 函数

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x},$$

它在  $(0, +\infty)$  上可微分,  $f'(x) = 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}$ ,

且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

然而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  不存在.

1022. 设有界函数  $f(x)$  在  $(x_0, +\infty)$  上可微分且有

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  存在. 由此可否推出有穷的或无穷的

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在?

解 不能. 例如,

$$f(x) = \cos(\ln x),$$

它在  $(0, +\infty)$  上有界且可微分, 其导数为

$$f'(x) = -\frac{\sin(\ln x)}{x},$$

同时有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

然而  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  不存在.

1023. 对不等式可否逐项微分?

解 一般地说不行. 例如, 在  $(-\infty, 0)$  上有

$$2x \leq x^2 + 1,$$

但在此区间上不能对此不等式逐项微分, 因为在  $(-\infty, 0)$  上不等式

$$2 \leq 2x$$

不成立.

1024. 导出表示和式

$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

及

$$Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$$

的公式.

解 设  $\bar{P}_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$ , (1)

$$\bar{Q}_n = 1 \cdot x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n. \quad (2)$$

则  $(\bar{P}_n)' = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = P_n$ ,

$$(\bar{Q}_n)' = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1} = Q_n.$$

另一方面, 由(1)式得

$$\bar{P}_n = \frac{x(1-x^n)}{1-x}.$$

由于  $(\bar{P}_n)' = P_n$ , 即

$$\left[ \frac{x(1-x^n)}{1-x} \right]' = P_n,$$

于是, 得

$$P_n = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

由(2) 式得

$$\bar{Q}_n = x(1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}) = xP_n.$$

由于  $(\bar{Q}_n)' = Q_n$ , 所以

$$(xP_n)' = Q_n,$$

即

$$P_n + xP_n' = Q_n. \quad (3)$$

而

$$P_n' = \left[ \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} \right]' = \frac{[-n(n+1)x^{n-1} + n(n+1)x^n](1-x)^2 + 2(1-x)[1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}]}{(1-x)^4}$$

将  $P_n$  及  $P_n'$  代入(3) 式, 即得

$$Q_n = \frac{1+x - (n+1)^2x^n + (2n^2+2n-1)x^{n+1} - n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

1025. 导出表示和式

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$$

及

$$T_n = \cos x + 2\cos 2x + \cdots + n\cos nx$$

的公式.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } S_n &= \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \left[ 2\sin \frac{x}{2} \sin x + 2\sin \frac{x}{2} \sin 2x \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + 2\sin \frac{x}{2} \sin nx \right] \\
 &= \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \left[ \left( \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} \right) + \cdots \right. \\
 &\quad \left. + \left( \cos \frac{2n-1}{2}x - \cos \frac{2n+1}{2}x \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \left( \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x \right) \\
 &= \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}
 \end{aligned}$$

即

$$S_n = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

又因

$$\begin{aligned}
 T_n &= (S_n)' = \\
 &= \frac{\left( n \cos \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x + (n+1) \cos \frac{n+1}{2}x \sin \frac{nx}{2} \right) \sin \frac{x}{2}}{2\sin^2 \frac{x}{2}}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2} x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\
&= \frac{n \left( \sin \frac{n+1}{2} x \cos \frac{nx}{2} + \cos \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2} \right) \sin \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\
&\quad - \frac{\sin \frac{nx}{2} \left( \sin \frac{n+1}{2} x \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{n+1}{2} x \sin \frac{x}{2} \right)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\
&= \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2} x - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}},
\end{aligned}$$

所以,

$$T_n = \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2} x - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

1026. 利用恒等式:

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}},$$

推出表示和式:

$$S_n = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$$

的公式.

**解** 对等式

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \quad (1)$$

两端分别求导数, 即得

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} \\
 & -\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n} \\
 & \cdots -\frac{1}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\sin\frac{x}{2^n} \\
 & = \frac{\cos x \sin\frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^n}\sin x \cos\frac{x}{2^n}}{2^n \sin^2\frac{x}{2^n}}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

(2)  $\div$  (1) 得

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} - \cdots - \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} \\
 & = \operatorname{ctg}x - \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n},
 \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} \\
 & = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg}x
 \end{aligned}$$

1027. 求证可微分的偶函数的导函数为奇函数, 而可微分的奇函数的导函数为偶函数.

对这个事实加以几何解释.

**证** 设  $f(x)$  为偶函数, 则  $f(x) = f(-x)$ .

两端微分之, 得

$$f'(x) = -f'(-x), \text{ 即 } f'(-x) = -f'(x).$$

这就说明  $f'(x)$  是奇函数.

同理可证: 可微分的奇函数的导函数为偶函数.

这个事实说明: 凡对称于  $Oy$  轴的图形, 其对称点

的切线也关于  $Oy$  轴对称; 凡关于原点对称的图形, 其对称点的切线互相平行.

1028. 求证可微分的周期函数, 其导函数仍为具有相同周期的周期函数.

证 设  $f(x)$  为周期函数, 周期为  $T$ , 则

$$f(x+T) = f(x).$$

两端微分之, 得

$$f'(x+T) = f'(x),$$

这说明  $f'(x)$  为具有周期  $T$  的周期函数.

1029. 若圆半径以 2 厘米 / 每秒的等速度增加, 则当圆半径  $R = 10$  厘米时, 圆面积增加的速度如何?

解 设圆面积为  $S$ , 则  $S = \pi R^2$ ,

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{R=10} = 2\pi R \left. \frac{dR}{dt} \right|_{R=10} = 40\pi (\text{平方厘米} / \text{每秒}),$$

故当  $R$  为 10 厘米时, 圆面积的增加速度为  $40\pi$  平方厘米 / 每秒.

1030. 长方形的一边  $x = 20$  米, 另一边  $y = 15$  米, 若第一边以 1 米 / 秒的速度减少, 而第二边以 2 米 / 秒的速度增加, 问这长方形的面积和对角线变化的速度如何?

解 面积  $S = xy$ , 对角线  $l = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $x > 0, y > 0$ ). 对  $t$  求导数, 即得

$$\frac{dS}{dt} = x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt}$$

及

当  $x \in (2, +\infty)$  时,

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2} 2^2 + \frac{1}{2} (x-2)[2 + (2x-2)] \\ &= x^2 - 2x + 2. \end{aligned}$$

从而有

$$S'(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 2 \text{ 时,} \\ 2x-2, & \text{当 } 2 < x < +\infty \text{ 时.} \end{cases} \quad (\text{图 2.22})$$

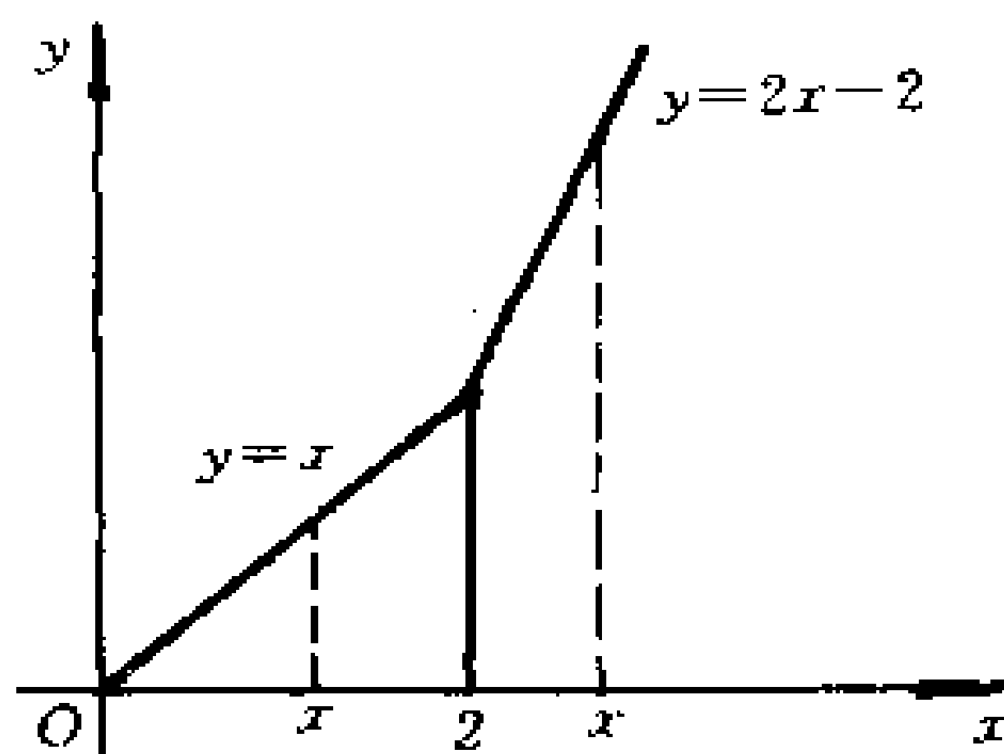


图 2.22

1033. 函数  $S(x)$  是由圆弧  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 、轴  $Ox$  及通过点  $O$  和  $x$  ( $|x| \leq a$ ) 而垂直于轴  $Ox$  的两条直线四者围成的面积. 作出函数  $S(x)$  的解析表达式, 求出导函数  $S'(x)$ , 并作其导函数  $y = S'(x)$  的图形.

**解**  $S(x)$  是由一个直角三角形和一个中心角为  $\alpha$  的扇形组成, 其中  $\sin \alpha = \frac{|x|}{a}$ , 故当  $0 < |x| \leq a$  时,

$$S(x) = \frac{|x|}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{|x|}{a}.$$

于是,

$$\begin{aligned}
 S'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{|x|}{x} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{|x|}{2} \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\
 &\quad + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{|x|}{x} \\
 &= \frac{|x| \sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \sqrt{a^2 - x^2} \operatorname{sgn} x \quad (0 < |x| \leq a).
 \end{aligned}$$

函数  $y = S(x)$  的图形如图 2.23 所示. 函数  $y = S'(x)$  的图形就是以原点为中心,  $a$  为半径的圆周上位于第一及第三象限的弧段, 但不包括  $(0, a)$  点及  $(0, -a)$  点, 图形省略.

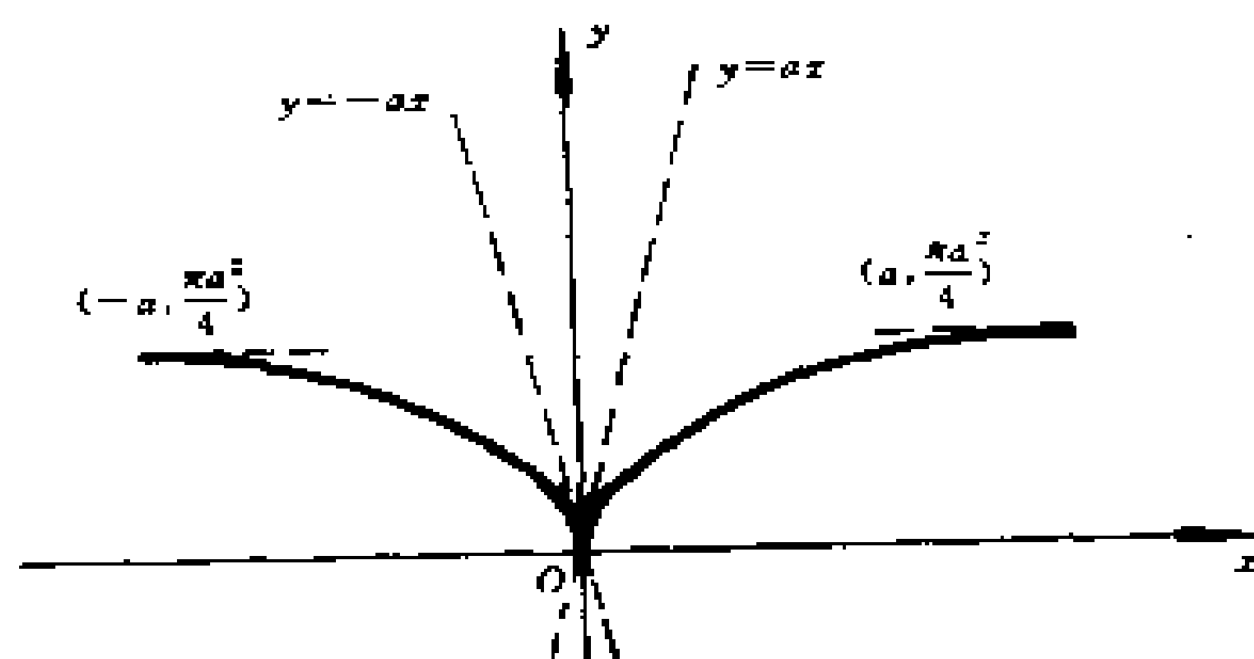


图 2.23

## § 2. 反函数的导函数. 用参变数表示 的函数的导函数. 隐函数的导函数

1° 反函数的导函数 若具有导函数  $f'(x) \neq 0$  的可微分的函数  $y = f(x) (a < x < b)$  有单值连续的反函数  $x = f^{-1}(y)$ , 则此反函数也可

微分,且有公式

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

成立.

2° 用参变数表示的函数的导函数 若方程组:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (\alpha < t < \beta),$$

其中  $\varphi(t)$  和  $\psi(t)$  为可微分的函数,且  $\varphi'(t) \neq 0$ , 确定  $y$  为  $x$  的单值连续函数:

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

则此函数的导函数存在,且可用公式

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

求出.

3° 隐函数的导函数 若可微函数  $y = y(x)$  满足方程

$$F(x, y) = 0,$$

则此隐函数之导函数  $y' = y'(x)$  可从以下方程求得:

$$\frac{d}{dx}[F(x, y)] = 0,$$

其中  $F(x, y)$  是当作变量  $x$  的复合函数.

1034. 证明由方程  $y^3 + 3y = x$  定义的单值函数  $y = y(x)$  存在,并求它的导函数  $y'_x$ .

证 对函数  $x = f(y) = y^3 + 3y$  有

$$f'(y) = 3y^2 + 3 = 3(y^2 + 1) > 0$$

其中  $y$  为任意实数,故  $f(y)$  是严格增大的(在  $-\infty < y < +\infty$ ),因此存在单值的反函数  $y = y(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ),且

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3(y^2 + 1)}.$$

1035. 证明由方程  $y - \varepsilon \sin y = x$  ( $0 \leq \varepsilon < 1$ ) 确定的单值函数

$y = y(x)$  存在, 并求其导函数  $y'_x$ .

证 对于函数  $x = f(y) = y - \varepsilon \sin y$  有

$$f'(y) = 1 - \varepsilon \cos y > 0 \quad (0 \leq \varepsilon < 1).$$

故  $f(y)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是严格增大的, 从而反函数  $y = y(x)$  存在且是单值的, 且

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y}.$$

1036. 设:

$$(a) y = x + \ln x \quad (x > 0); \quad (b) y = x + e^x;$$

$$(c) y = \operatorname{sh} x; \quad (d) y = \operatorname{th} x.$$

求它们的反函数  $x = x(y)$  的存在域, 并求它们的导函数.

解 (a) 由  $y'_x = 1 + \frac{1}{x} > 0 \quad (x > 0)$  知有单值连续反函数  $x = x(y)$ , 其存在域为  $-\infty < y < +\infty$ , 而导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}.$$

(b) 由  $y'_x = 1 + e^x > 0$  知有单值连续反函数  $x = x(y)$ , 其存在域为  $-\infty < y < +\infty$ , 而导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1 + e^x} = \frac{1}{1 - x + y}.$$

(c) 由  $y'_x = \operatorname{ch} x > 0$  知有单值连续反函数  $x = x(y)$ , 其存在域为  $-\infty < y < +\infty$ , 而导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}},$$

其中因为  $x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$ , 所以,  $e^x + e^{-x} =$

$$2\sqrt{1+y^2}.$$

(r) 由  $y'_x = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2} > 0$  知有单值连续反函数  $x = x(y)$ , 其存在域为  $-1 < y < 1$ . 由于

$$y^2 = \operatorname{th}^2 x = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

而  $\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{y'^2_x} = x'^2_y$ , 于是, 反函数的导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1-y^2}.$$

1037. 设:

$$(a) y = 2x^2 - x^4; \quad (6) y = \frac{x^2}{1+x^2};$$

$$(B) y = 2e^{-x} - e^{-2x}.$$

选出反函数  $x = x(y)$  的单值连续的各枝, 求它们的导函数并作其图形.

**解** (a)  $x^4 - 2x^2 + y = 0$ .

$$x^2 = 1 \pm \sqrt{1-y}.$$

单值连续的各枝为

$$x_1 = -\sqrt{1+\sqrt{1-y}} \quad (-\infty < y \leq 1),$$

$$x_2 = -\sqrt{1-\sqrt{1-y}} \quad (0 \leq y \leq 1),$$

$$x_3 = \sqrt{1-\sqrt{1-y}} \quad (0 \leq y \leq 1),$$

$$x_4 = \sqrt{1+\sqrt{1-y}} \quad (-\infty < y \leq 1).$$

由  $y = 2x^2 - x^4$ , 微分得

$$1 = 4x \frac{dx}{dy} - 4x^3 \frac{dx}{dy},$$

所以



$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{4x - 4x^3}.$$

从而有

$$\frac{dx_i}{dy} = \frac{1}{4x(1-x^2)} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (\text{图 2.24}).$$

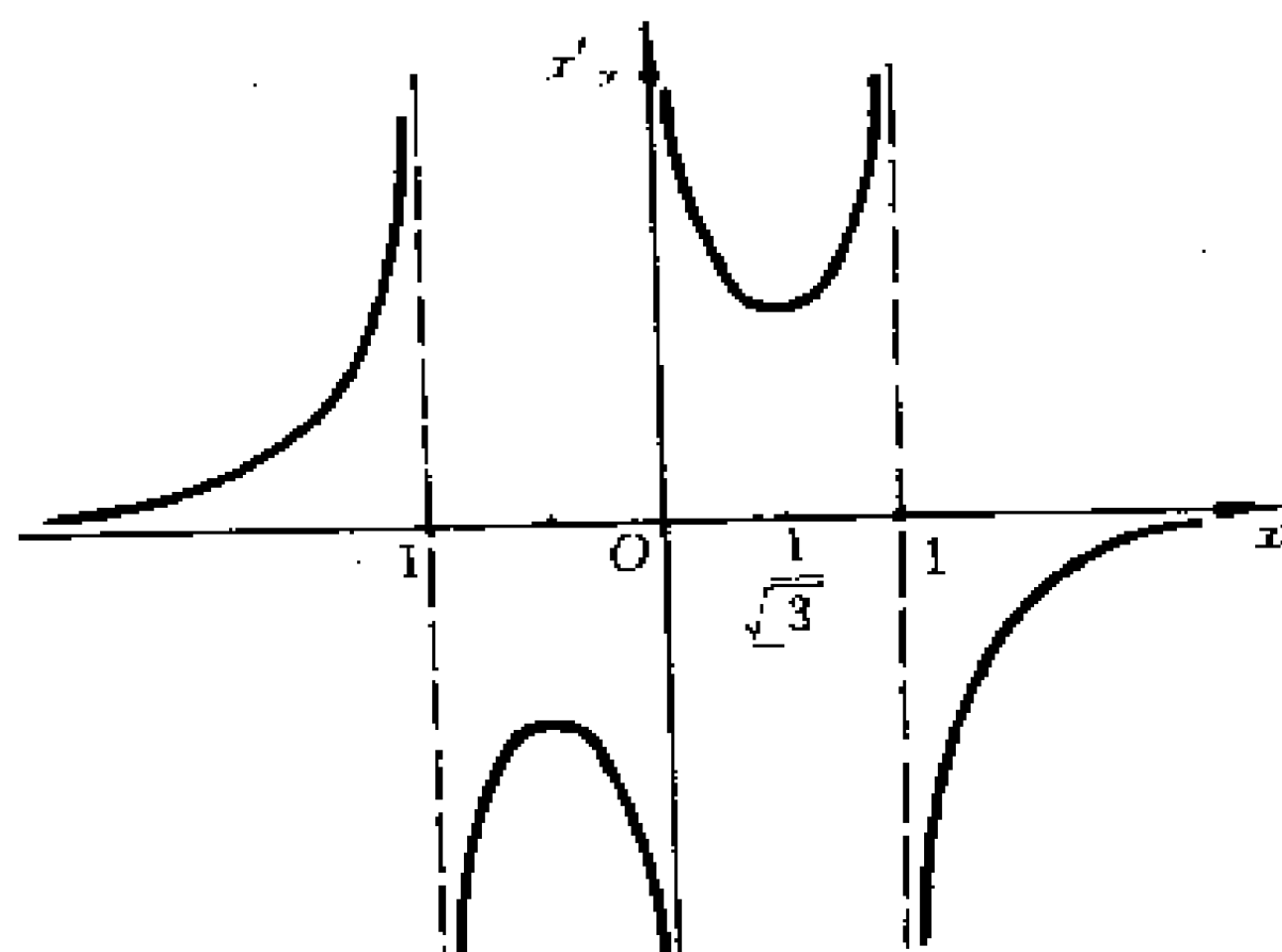


图 2.24

$$(6) \frac{x^2}{1+x^2} = y, \text{ 即 } x^2 = \frac{y}{1-y}.$$

单值连续各枝为

$$\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt{\frac{y}{1-y}}, \\ x_2 &= \sqrt{\frac{y}{1-y}} \end{aligned} \quad (0 \leq y < 1).$$

$$\text{由 } y'_x = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{及 } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x} \text{ 有}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dy} &= \frac{(1+x^2)^2}{2x} \\ &= \frac{x^3}{2y^2}.\end{aligned}$$

当  $x_i \rightarrow 0$  时,

$$\frac{dx_i}{dy} \rightarrow$$

$$(\operatorname{sgn} x_i) \cdot (+\infty)$$

$$(i=1,2) \text{ (图 2.25)}$$

(B)  $y$

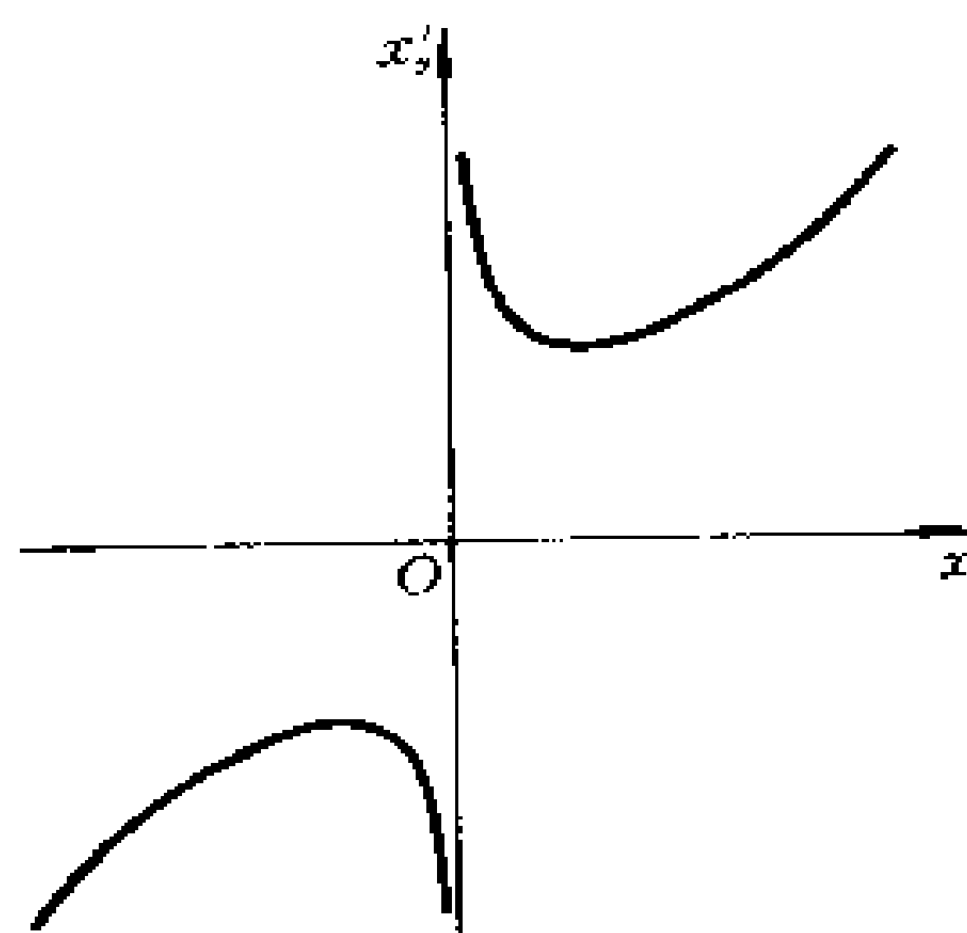


图 2.25

$$\begin{aligned}&= 2e^{-x} - e^{-2x}, \\ &\text{解出 } e^{-x}, \text{ 得 } e^{-x} \\ &= 1 \pm \sqrt{1-y}.\end{aligned}$$

单值连续各枝为

$$\begin{aligned}x_1 &= -\ln(1 + \\ &\quad \sqrt{1-y}) \\ &(-\infty < y \leq 1), \\ x_2 &= -\ln(1 - \\ &\quad \sqrt{1-y}) \\ &= \ln \frac{1 + \sqrt{1-y}}{y} \\ &(0 < y \leq 1).\end{aligned}$$

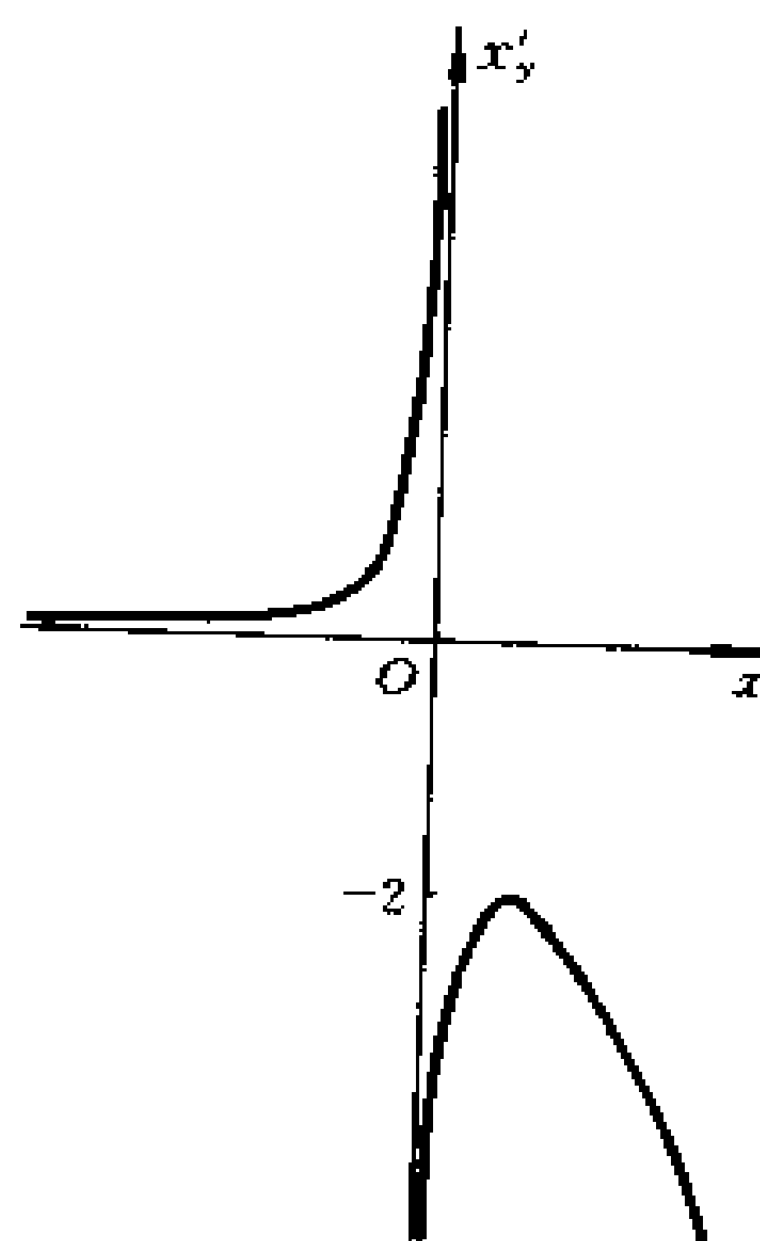


图 2.26

由  $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$ , 对  $y$  求导数, 得

$$1 = -2e^{-x} \frac{dx}{dy} + 2e^{-2x} \frac{dx}{dy},$$

所以,

$$\frac{dx_i}{dy} = - \frac{1}{2(e^{-x} - e^{-2x})}$$

( $i = 1, 2$ )(图 2.26).

1038. 作出函数  $y = y(x)$  的略图, 并求其导函数  $y'_x$ , 设:  $x = -1 + 2t - t^2$ ,  $y = 2 - 3t + t^3$ . 当  $x = 0$  及  $x = -1$  时  $y'_x(x)$  等于甚么? 在何点  $M(x, y)$  的导函数  $y'_x(x) = 0$ ?

解 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3 + 3t^2}{2 - 2t} = -\frac{3}{2}(1 + t).$$

当  $t = -1$ , 即  $x = -4$ ,  $y = 4$  时,  $y'_x(x) = 0$ .

当  $x = 0$  时,  $t = 1$ , 此时  $y'_x(x) = -3$ ;

当  $x = -1$  时,  $t = 0$  或  $t = 2$ , 此时  $y'_x(x) = -\frac{3}{2}$

或  $y'_x(x) = -\frac{9}{2}$ .

列表:

$t$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x$	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
$y$	-16	0	4	2	0	4	20	54

当  $t < -1$  时,  $\frac{dy}{dx} > 0$ , 函数值  $y$  随自变量增加而增加, 曲线上升.

当  $t > -1$  时,  $\frac{dy}{dx} < 0$ , 曲线下降.

图形如图 2.27 所示.

求导函数  $y'_x$  (参数是正数). 设:

$$1039. x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}},$$

$$y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}.$$

$$\text{解 } \frac{dy}{dt}$$

$$= -\frac{1}{6\sqrt[3]{t^2} \cdot \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}},$$

$$\frac{dx}{dt} =$$

$$-\frac{1}{6\sqrt{t} \cdot \sqrt[3]{(1 - \sqrt{t})^2}},$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \sqrt[6]{\frac{(1 - \sqrt{t})^4}{t(1 - \sqrt[3]{t})^3}} \quad (t > 0, t \neq 1).$$

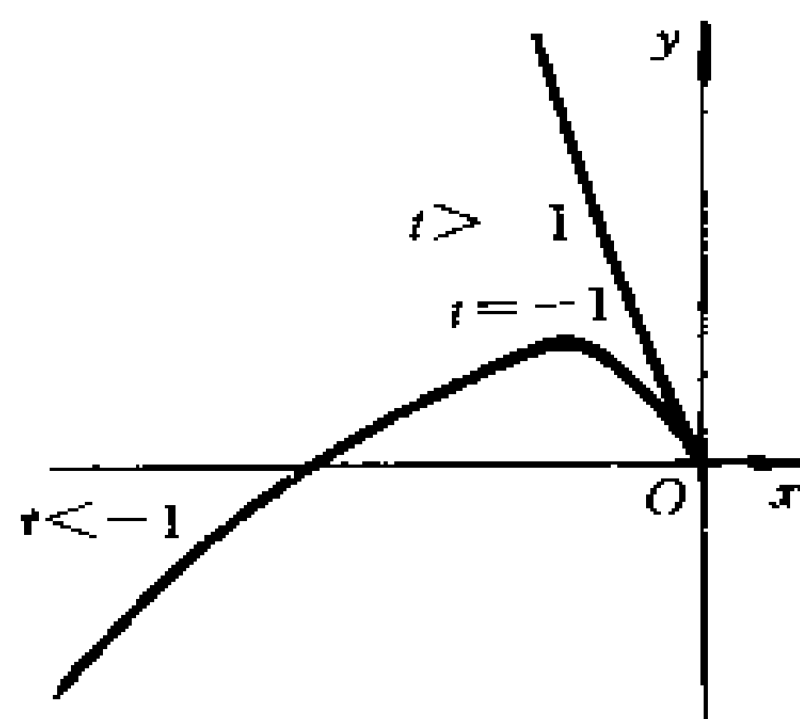


图 2.27

$$1040. x = \sin^2 t, y = \cos^2 t.$$

$$\text{解 } \frac{dy}{dt} = -2\cos t \sin t, \frac{dx}{dt} = 2\sin t \cos t,$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\cos t \sin t}{2\cos t \sin t} = -1 \quad (0 < x < 1).$$

$$1041. x = a \cos t, y = b \sin t.$$

$$\text{解 } \frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \cot t \quad (0 < |t| < \pi).$$

$$1042. x = a \cosh t, y = b \sinh t.$$

$$\text{解 } \frac{dy}{dx} = \frac{b \cosh t}{a \sinh t} = \frac{b}{a} \coth t \quad (t \neq 0).$$

$$1043. x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t.$$

$$\text{解 } \frac{dy}{dx} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t}$$

$$= \frac{1}{1+t^2}.$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\operatorname{sgnt}}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = \operatorname{sgnt} \quad (0 < |t| < +\infty).$$

1047. 证明由方程组

$$x = 2t + |t|, y = 5t^2 + 4t|t|,$$

所确定的函数  $y = y(x)$  当  $t = 0$  时可微分. 但它的导函数不能用普通的公式求得.

证 当  $t$  由 0 变化到  $\Delta t$  时,  $x$  由 0 变化到  $\Delta x = 2\Delta t + |\Delta t|$ ,  $y$  由 0 变化到  $\Delta y = 5(\Delta t)^2 + 4\Delta t \cdot |\Delta t|$ . 于是,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{t=0} &= \frac{5(\Delta t)^2 + 4\Delta t \cdot |\Delta t|}{2\Delta t + |\Delta t|} \\ &= \begin{cases} 3\Delta t, & \Delta t > 0, \\ \Delta t, & \Delta t < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

从而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 0 \quad (\Delta t \rightarrow 0).$$

即  $y = y(x)$  当  $t = 0$  时可微分. 但由于  $|t|$  当  $t = 0$  时不可微, 因而  $\frac{dx}{dt}$  及  $\frac{dy}{dt}$  当  $t = 0$  时不存在. 所以, 导数  $\frac{dy}{dx}$  当  $t = 0$  的值不能从普通公式求得.

求下列隐函数的导函数  $y'_x$ :

1048.  $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$ . 当  $x = 2$  与  $y = 4$  及当  $x = 2$  与  $y = 0$  时,  $y'$  等于甚么?

解 对  $x$  微分, 得

$$2x + 2xy'_x + 2y - 2yy'_x = 2.$$

于是,

$$y'_x = \frac{1-x-y}{x-y} \quad (x \neq y),$$

$$y'_x \Big|_{\substack{x=2 \\ y=4}} = \frac{5}{2}, \quad y'_x \Big|_{\substack{x=2 \\ y=0}} = -\frac{1}{2}.$$

1049.  $y^2 = 2px$  (抛物线).

解 对  $x$  微分, 得

$$2yy'_x = 2p.$$

于是,

$$y'_x = \frac{p}{y} \quad (y \neq 0).$$

1050.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (椭圆).

解 对  $x$  微分, 得

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'_x}{b^2} = 0.$$

于是,

$$y'_x = -\frac{b^2x}{a^2y} \quad (y \neq 0).$$

1051.  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$  (抛物线).

解 对  $x$  微分, 得

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} y'_x = 0.$$

于是,

$$y'_x = -\sqrt{\frac{y}{x}} \quad (x > 0, y > 0).$$

1052.  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  (内摆线).

解 对  $x$  微分, 得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'_x = 0.$$

于是,

$$y'_{\varphi} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \quad (x \neq 0).$$

1053.  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  (对数螺线).

解 对  $x$  微分, 得

$$\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{xy'_{\varphi} - y}{x^2} = \frac{x + yy'_{\varphi}}{x^2 + y^2}.$$

于是,

$$y'_{\varphi} = \frac{x + y}{x - y} \quad (x \neq y, x \neq 0).$$

1054. 求  $y'_{\varphi}$ , 设:

(a)  $r = a\varphi$  (阿基米得螺线);

(b)  $r = a(1 + \cos\varphi)$  (心脏形线);

(B)  $r = ae^{m\varphi}$  (对数螺线),

其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  及  $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$  表极坐标.

解  $x = r \cos\varphi, y = r \sin\varphi$ , 其中  $r = r(\varphi)$ . 于是,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\frac{dr}{d\varphi} \sin\varphi + r \cos\varphi}{\frac{dr}{d\varphi} \cos\varphi - r \sin\varphi}. \quad (1)$$

(a)  $\frac{dr}{d\varphi} = a$ , 代入(1)式得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{a \sin\varphi + a \varphi \cos\varphi}{a \cos\varphi - a \varphi \sin\varphi} \\ &= \operatorname{tg}(\varphi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \varphi). \end{aligned}$$

(b)  $\frac{dr}{d\varphi} = -a \sin\varphi$ , 代入(1)式得

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{-a \sin^2 \varphi + a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi}{-a \sin \varphi \cos \varphi - a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi} \\
&= -\frac{\cos 2\varphi + \cos \varphi}{\sin 2\varphi + \sin \varphi} \\
&= -\frac{2 \cos \frac{3\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{3\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} \\
&= -\operatorname{ctg} \frac{3\varphi}{2} \left( \varphi \neq 0, \varphi \neq \pm \frac{2\pi}{3} \right).
\end{aligned}$$

(B)  $\frac{dr}{d\varphi} = mae^{m\varphi}$ , 代入(1)式得

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{mae^{m\varphi} \sin \varphi + ae^{m\varphi} \cos \varphi}{mae^{m\varphi} \cos \varphi - ae^{m\varphi} \sin \varphi} \\
&= \frac{m \sin \varphi + \cos \varphi}{m \cos \varphi - \sin \varphi} \\
&= \operatorname{tg} \left\{ \varphi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{m} \right\}.
\end{aligned}$$

### § 3. 导函数的几何意义

1° 切线和法线的方程 可微分的函数  $y = f(x)$  在其图形上之一点  $M(x, y)$  (图 2.28) 处的切线  $MT$  和法线  $MN$  的方程的形式分别是:

$$Y - y = y'(X - x)$$

及

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

其中  $X, Y$  为切线或法线上的流动坐标, 而  $y' = f'(x)$  为切点处导函数的值.

2° 切线长和法线长  $PT$  为次切线,  $PN$  为次法线,  $MT$  为切线,  $MN$  为法线. 设  $\operatorname{tg} \alpha = y'$  (图 2.28). 我们得下列的值:



$$PT = \left| \frac{y}{y'} \right|, PN = |yy'|,$$

$$MT = \left| \frac{y}{y'} \right| \sqrt{1 + y'^2},$$

$$MN = |y| \sqrt{1 + y'^2}.$$

3° 切线与切点的向径间的夹角 若  $r = f(\varphi)$  为曲线的极坐标方程及  $\beta$  为切线  $MT$  与切点  $M$  的向径  $OM$  所成的角(图 2.29), 则

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{r'}.$$

1055. 写出曲线  $y = (x + 1)$

$\sqrt[3]{3 - x}$  上  $A(-1, 0)$ 、 $B(2, 3)$ 、 $C(3, 0)$  诸点处的切线和法线方程.

**解** 由于

$$y' = \sqrt[3]{3 - x} - \frac{x + 1}{3 \sqrt[3]{(3 - x)^2}},$$

所以, 在  $A$  点的切线方程为

$y - 0 = y'|_{x=-1}(x + 1)$ , 即  $y = \sqrt[3]{4}(x + 1)$ ;  
法线方程为

$$y - 0 = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x + 1),$$

即  $y = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x + 1)$ .

在  $B$  点的切线方程为

$$y - 3 = y'|_{x=2}(x - 2), \text{ 即 } y = 3;$$

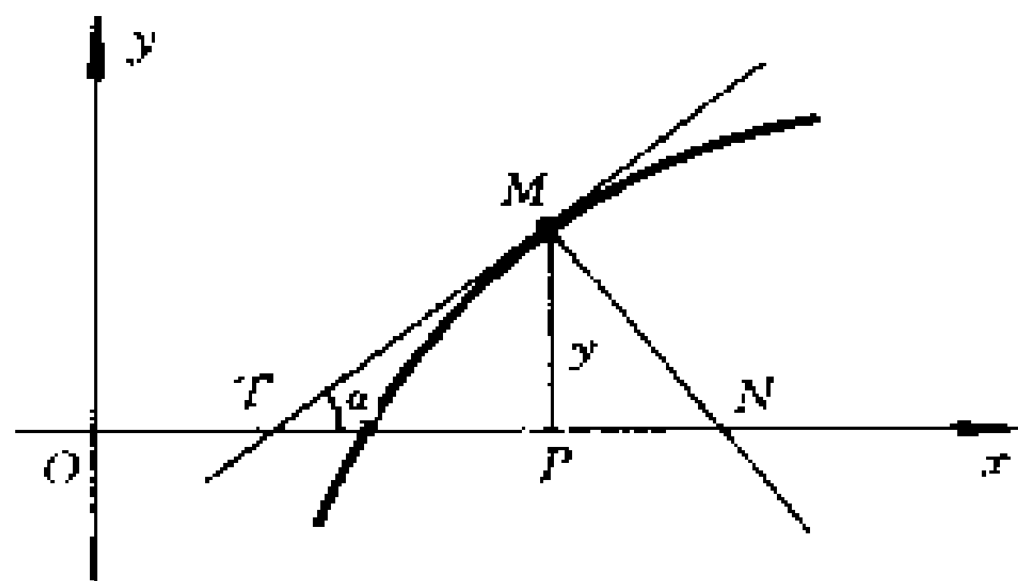


图 2.28

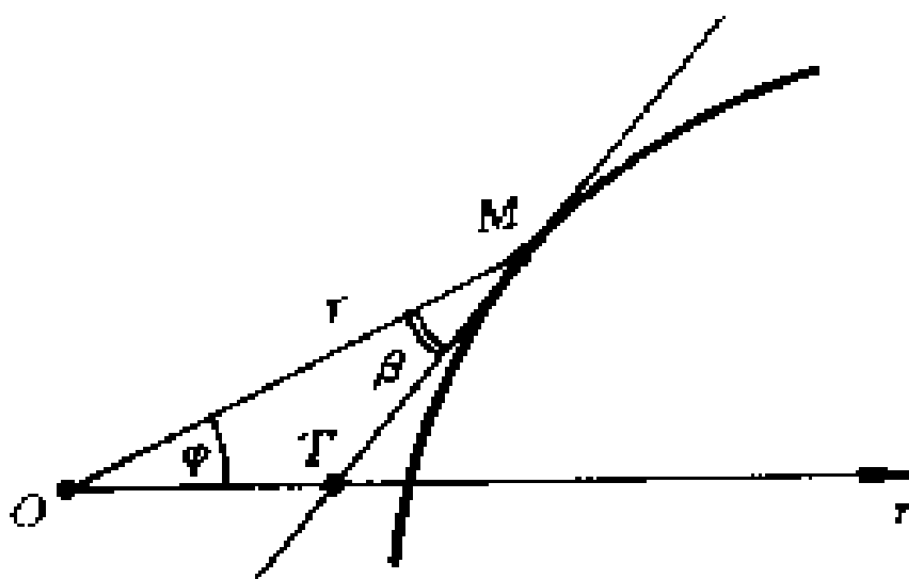


图 2.29

法线方程为

$$x = 2.$$

在 C 点, 由于  $y'$  为无穷, 故切线方程为

$$x = 3;$$

法线方程为

$$y = 0.$$

1056. 在曲线

$$y = 2 + x - x^2$$

上的哪些点其切线 (a) 平行于  $Ox$  轴; (b) 平行于第一象限角的平分线?

解 由于

$$y' = 1 - 2x,$$

所以, 有

$$(a) \text{ 令 } y' = 0, \text{ 则 } x = \frac{1}{2}, y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4},$$

故在点  $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$  处其切线平行于  $Ox$  轴;

(b) 令  $y' = 1$ , 则  $x = 0, y = 2$ , 故在点  $(0, 2)$  处其切线平行于第一象限角的平分线.

1057. 证明抛物线

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (a \neq 0, x_1 < x_2)$$

与  $Ox$  轴相交所成的两角  $\alpha$  及  $\beta$

$\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$  彼此相等.

解 如图 2.30 所示, 显然抛物线与  $Ox$  轴的交点为  $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$ . 由于  $y' = 2ax - a(x_1 + x_2)$ , 故在点  $A, B$  处切线的斜率分别为

$$\begin{aligned}
 k_A = y' \big|_{x=x_1} &= 2ax_1 - a(x_1 + x_2) \\
 &= a(x_1 - x_2) = \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\pi - \beta),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

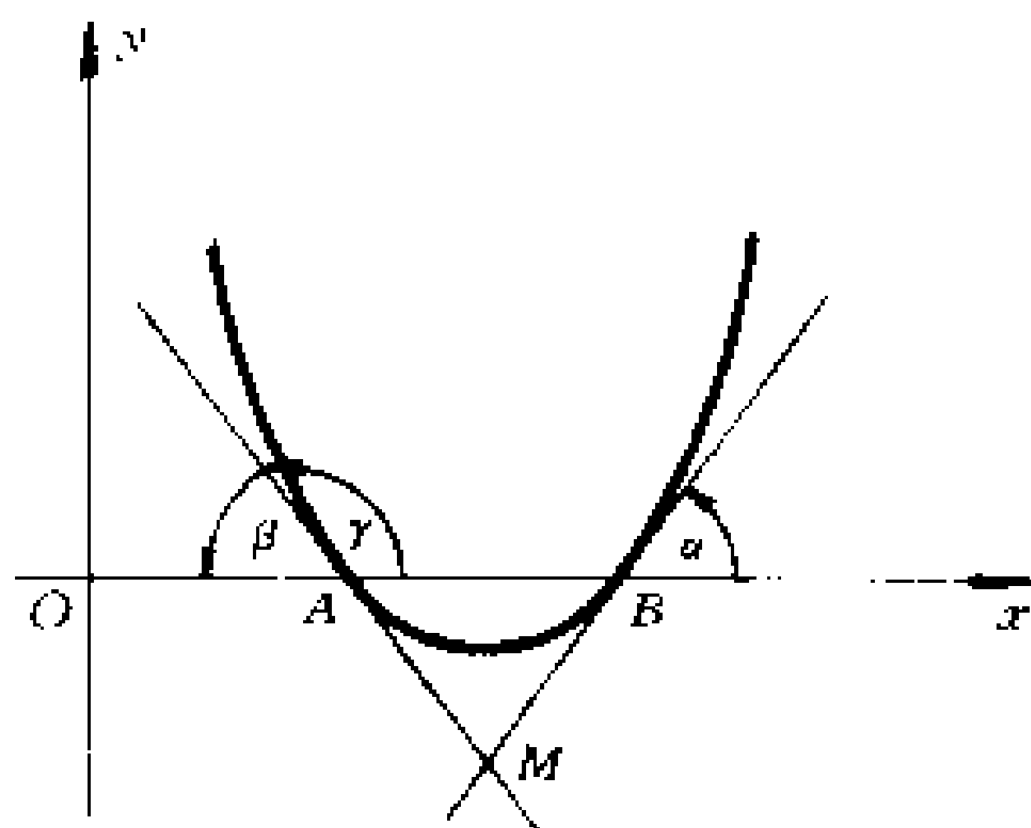


图 2.30

$$\begin{aligned}
 k_B = y' \big|_{x=x_2} &= 2ax_2 - a(x_1 + x_2) \\
 &= a(x_2 - x_1) = \operatorname{tg} \alpha.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

由(2)式得

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = a(x_1 - x_2). \tag{3}$$

由(1)式及(3)式证得

$$\alpha = \beta.$$

1058. 在曲线

$$y = 2\sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

上求出“曲线的坡度”(即是  $|y'|$ ) 大于 1 的区域.

解 由于  $y' = 2\cos x$ , 故要  $|y'| > 1$ , 只要

$$|\cos x| > \frac{1}{2},$$

也即

$$|x| < \frac{\pi}{3} \quad \text{及} \quad \frac{2\pi}{3} < |x| \leq \pi,$$

此即所求的区域.

1059. 函数  $y = x$  及  $y_1 = x + 0.01 \cdot \sin 1000\pi x$  二者相差不大于 0.01, 则这些函数的导函数的差的最大值为何? 作出对应的图形.

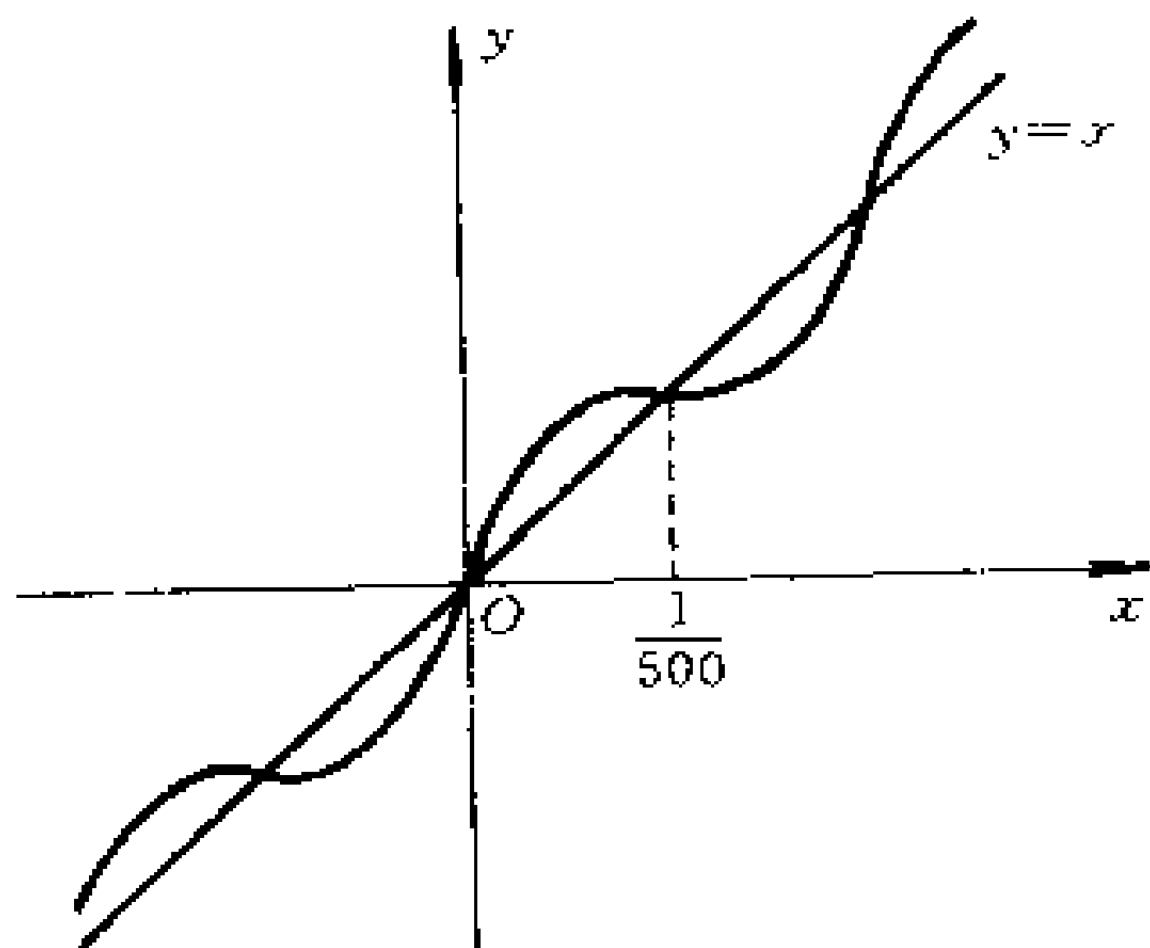


图 2.31

**解** 导函数差的最大值

$$\max |y' - y_1'| = \max |10\pi \cdot \cos 1000\pi x| = 10\pi \approx 31.4.$$

由此可见, 两函数相差甚微时 (图 2.31), 其导函数却可相差很大.

如图 2.32 所示.

1060. 曲线  $y = \ln x$  与  $Ox$  轴相交的角如何?

**解** 曲线  $y = \ln x$  与  $Ox$  轴的交点为  $(1, 0)$ , 设曲线与  $Ox$  轴的相交角为  $\alpha$ , 则

$$\operatorname{tg} \alpha = y' \Big|_{x=1} = \frac{1}{x} \Big|_{x=1} = 1,$$

故交角  $\alpha$  为  $45^\circ$ .

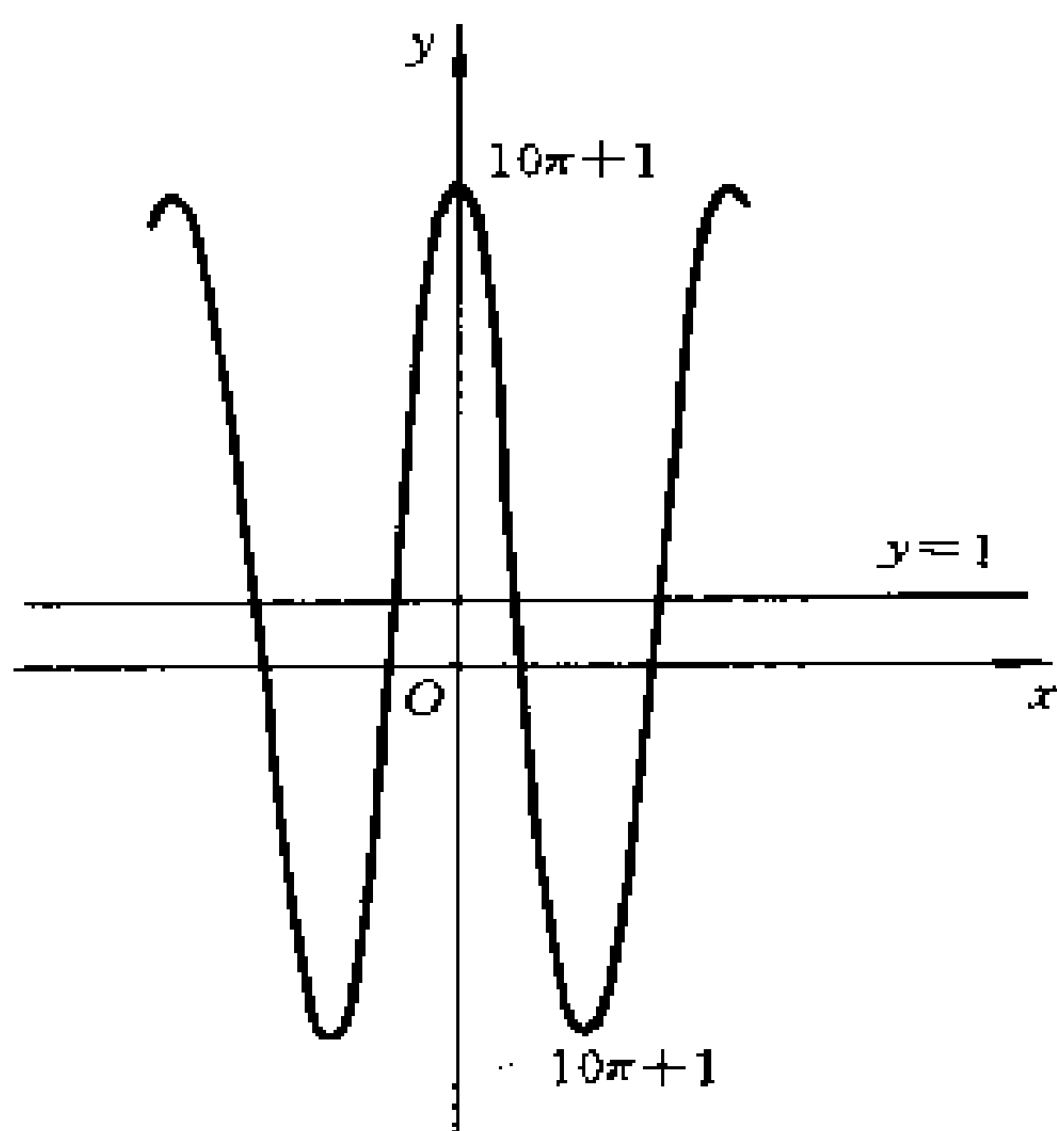


图 2.32

1061. 曲线  $y = x^2$  及  $x = y^2$  相交的角如何?

解 两曲线的交点为  $(0,0)$  及  $(1,1)$ . 由于导数为

$$y' = 2x \text{ 及 } y' = \frac{1}{2y},$$

故在  $(0,0)$  点两曲线的交角显然为  $90^\circ$ .

在  $(1,1)$  点两切线的斜率分别为

$$k_1 = 2 \text{ 及 } k_2 = \frac{1}{2},$$

故其交角  $\theta$  的正切为

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4},$$

于是

$$\theta = \arctan \frac{3}{4} \approx 37^\circ.$$

$\theta > 89^\circ$ , 相当于  $\operatorname{tg} \theta > \operatorname{tg} 89^\circ = 57.29$ , 即

$$n > 57.29.$$

1064. 求出曲线: (a)  $y = \sqrt{1 - e^{-a^2 x^2}}$  于点  $x = 0$  处,

(6)  $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$  于点  $x = 1$  处的左切线与右切线间的夹角.

解 (a) 函数的左、右导数分别为

$$\begin{aligned} y'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{1 - e^{-a^2 x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -0} \left[ -\sqrt{\frac{e^{-a^2 x^2} - 1}{-a^2 x^2}} \cdot a^2 \right] \\ &= -|a|, \\ y'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1 - e^{-a^2 x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{e^{-a^2 x^2} - 1}{-a^2 x^2}} \cdot a^2 = |a|. \end{aligned}$$

所以, 于点  $x = 0$  处左、右切线之间的夹角  $\theta$  满足

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2|a|}{|a|^2 - 1}, \text{ 即 } \theta = 2 \arcsin \frac{1}{|a|}.$$

(6) 函数的左、右导数分别为

$$\begin{aligned} y'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \arcsin 1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-\arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\frac{1-x^2}{1+x^2}}{1-x} = 1, \end{aligned}$$

同理,  $y'_-(1) = -1$ . 因此, 左、右切线的斜率互为负倒数, 所以, 夹角为  $90^\circ$ .

1065. 证明对数螺线  $r = ae^{m\varphi}$  ( $a$  及  $m$  为常数) 的切线与切点的向径所成的角度为一常量.

**证** 设切线与切点的向径所成的角为  $\beta$ , 由于

$$r = ae^{m\varphi}, r' = ame^{m\varphi},$$

所以  $\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{r'} = \frac{1}{m}$ , 它为一常数, 故  $\beta$  为一常量.

1066. 求曲线  $y = ax^n$  的次切线长, 由此给出作这曲线的切线的方法.

**解** 设在任一点  $M(x, y)$  的次切线长为  $l_r$ , 如图 2.33 中的  $|PT|$ , 则

$$\begin{aligned} l_r &= \left| \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha} \right| = \left| \frac{y}{y'} \right| \\ &= \left| \frac{ax^n}{nax^{n-1}} \right| = \left| \frac{x}{n} \right|. \end{aligned}$$

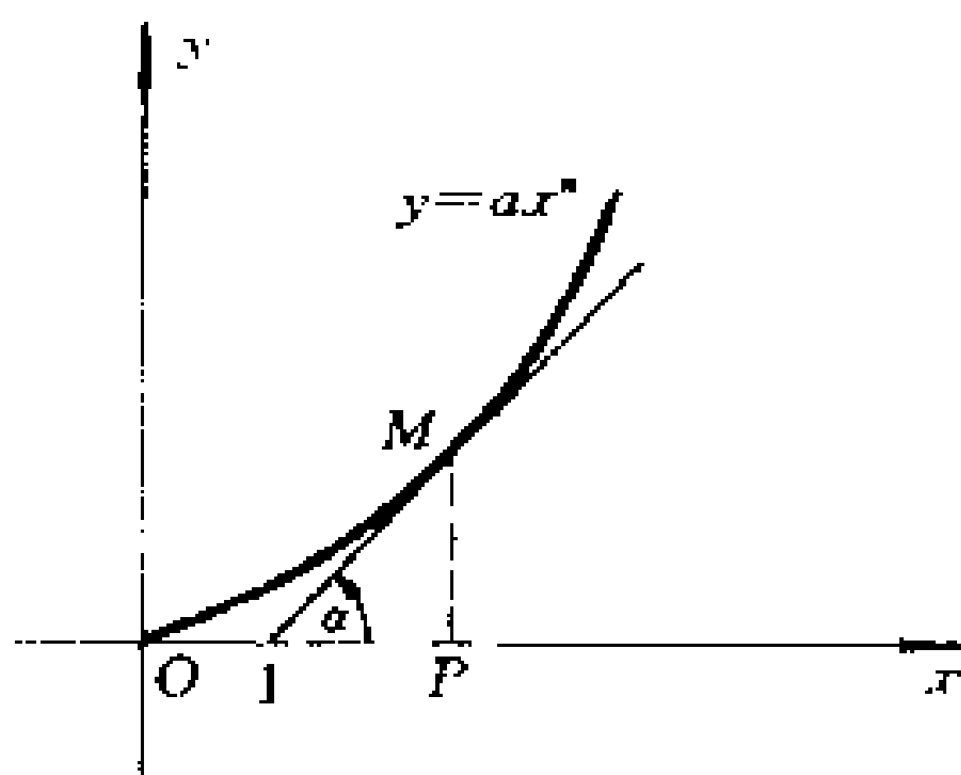


图 2.33

由此, 该曲线的切线可以这样作: 对于曲线  $y = ax^n$  上任一点  $M(x, y)$ , 由此点向  $Ox$  轴作垂线, 得交点  $P$ . 再在  $Ox$  轴上取点  $T$ , 使  $|PT| = \frac{|x|}{n}$  (当然, 只是在  $P$  的一侧取点  $T$ , 若在此点  $yy' > 0$ , 则在  $P$  点的左侧取  $T$ ; 若在此点  $yy' < 0$ , 则在  $P$  点的右侧取  $T$ . 以后不再说明), 然后联接  $MT$ , 则  $MT$  就是所求的切线.

1067. 证明抛物线  $y^2 = 2px$  的 (a) 次切线长等于切点的横坐标的两倍; (b) 次法线为一常量. 给出作抛物线的切线的方法.

证 (a) 次切线长为

$$\begin{aligned} l_T &= |PT| = \left| \frac{y}{y'} \right| = \left| \frac{y}{\frac{p}{y}} \right| \\ &= \left| \frac{y^2}{p} \right| = \left| \frac{2px}{p} \right| = 2|x|, \end{aligned}$$

所以, 次切线长为切点横坐标的两倍.

$$(6) \text{ 次法线长为 } l_N = |PN| = |yy'| = \left| y \cdot \frac{p}{y} \right| = |p|,$$

所以, 次法线长为一常量.

由此, 抛物线的切线可以这样作: 由曲线  $y^2 = 2px$  上的任一点  $M(x, y)$  向  $Ox$  轴作垂线, 得交点  $P$ . 由于  $yy' = p$ , 故当  $p > 0$  ( $p < 0$ ) 时, 在  $Ox$  轴上  $P$  点的左(右)侧取点  $T$ , 如图 2.34, 使  $|PT| =$

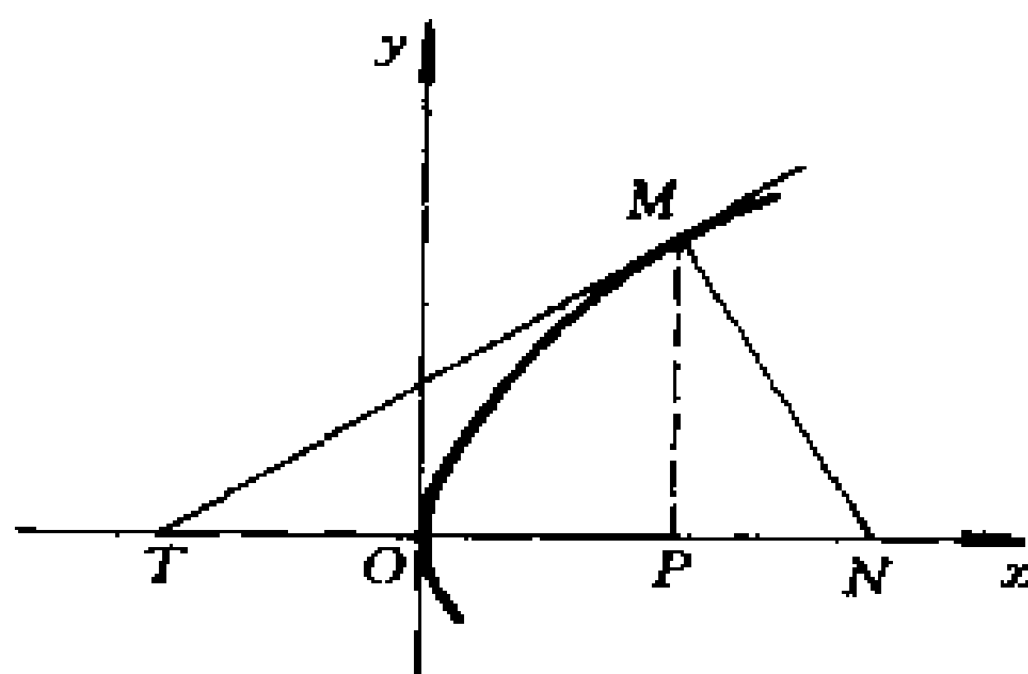


图 2.34

$2|x|$ , 联结  $MT$ , 此即所求的切线.

1068. 证明指数曲线  $y = a^x$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 有定长的次切线. 给出作指数曲线的切线的方法.

证 次切线长为

$$l_T = \left| \frac{y}{y'} \right| = \left| \frac{a^x}{a^x \ln a} \right| = \frac{1}{|\ln a|}.$$

从而  $l_T$  为常量.

由此, 该曲线的切线可以这样作: 对于曲线  $y = a^x$  上任一点  $M(x, y)$  向  $Ox$  轴作垂线, 得交点  $P$ . 由于当  $a$



$> 1$  时  $yy' > 0$ , 当  $0 < a < 1$  时  $yy' < 0$ , 故在  $Ox$  轴上点  $P$  的左侧 (当  $a > 1$  时) 或右侧 (当  $0 < a < 1$  时) 取点  $T$ , 使  $|PT| = \frac{1}{|\ln a|}$ , 联接  $MT$ , 此即所求的切线 (图 2.35).

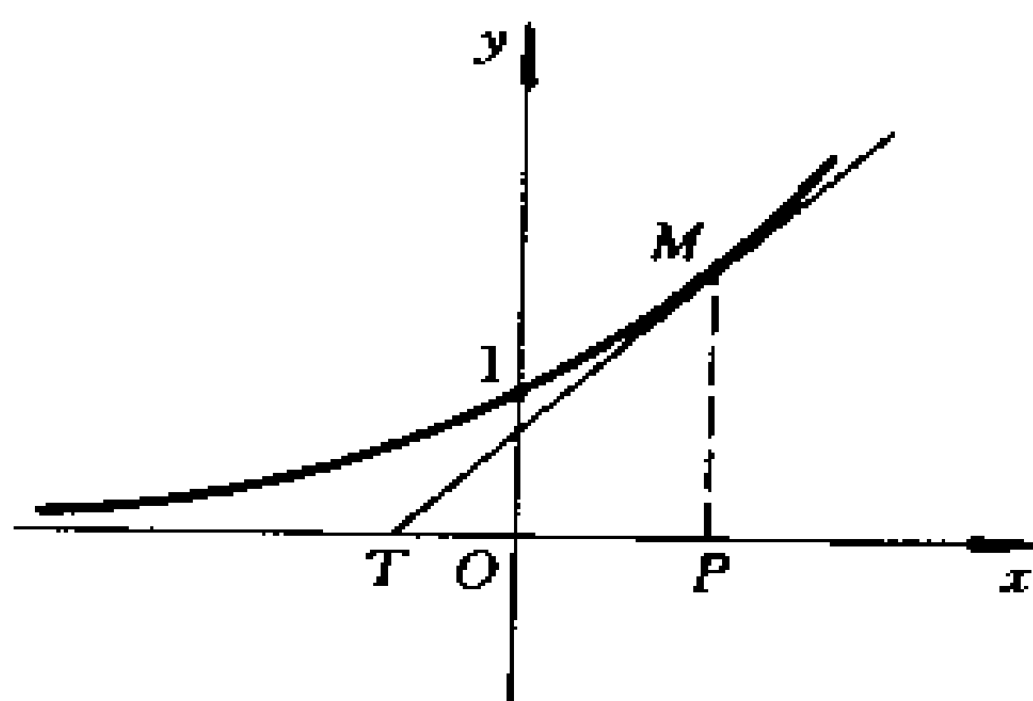


图 2.35

### 1069. 求悬链线

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

上任一点  $M(x_0, y_0)$  处的法线长.

**解** 法线长为

$$\begin{aligned} & |MN| \\ &= |y| \sqrt{1 + y'^2} \Big|_{(x_0, y_0)}. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} y' &= a \cdot \frac{1}{a} \operatorname{sh} \frac{x}{a} = \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \\ \sqrt{1 + y'^2} &= \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} = \left| \operatorname{ch} \frac{x}{a} \right| \\ &= \left| \frac{y}{a} \right|, \end{aligned}$$

故

$$|MN| = |y_0| \cdot \left| \frac{y_0}{a} \right| = \frac{y_0^2}{|a|},$$

即

$$|MN| = \frac{y_0^2}{|a|} \quad (a \neq 0).$$

1070. 证明内摆线

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$$

的切线介于坐标轴间的部分的长为一常量.

证 由方程  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  求得导数  $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$ . 对于曲线上任一点  $(x_0, y_0)$  ( $x_0 \neq 0$ ) 处, 其切线方程为

$$y - y_0 = -\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}(x - x_0),$$

它在两坐标轴上的截距分别为

$$l_x = x_0 + \sqrt[3]{x_0 y_0^2} \text{ 及 } l_y = y_0 + \sqrt[3]{x_0^2 y_0}.$$

于是, 切线在两坐标轴间的部分长为

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}.$$

由于,

$$\begin{aligned} l_x^2 + l_y^2 &= x_0^2 + y_0^2 + 3x_0 \sqrt[3]{x_0 y_0^2} + 3y_0 \sqrt[3]{x_0^2 y_0} \\ &= x_0^2 + y_0^2 + 3 \sqrt[3]{x_0^2 y_0^2} (\sqrt[3]{x_0^2} + \sqrt[3]{y_0^2}) \\ &= x_0^2 + y_0^2 + 3 \sqrt[3]{a^2 x_0^2 y_0^2} \\ &= (a^{\frac{2}{3}} - y_0^{\frac{2}{3}})^3 + y_0^2 + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2 - 3a^{\frac{4}{3}} y_0^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}} y_0^{\frac{4}{3}} + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2 - 3a^{\frac{2}{3}} y_0^{\frac{2}{3}} (a^{\frac{2}{3}} - y_0^{\frac{2}{3}}) + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2 - 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2. \end{aligned}$$

故  $l = a$ , 即内摆线

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$$

的切线介于坐标轴间部分的长为一常量.

1071. 若抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与  $Ox$  轴相切, 则系数  $a, b, c$  间的关系如何?

**解** 由方程  $y = ax^2 + bx + c$  求得导数  $y' = 2ax + b$ . 要抛物线与  $Ox$  轴相切, 需  $y' = 0$ , 所以

$$2ax + b = 0,$$

即

$$x = -\frac{b}{2a}; \quad (1)$$

另一方面, 切点的横坐标满足:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

即

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}. \quad (2)$$

比较(1)式及(2)式, 得

$$b^2 - 4ac = 0,$$

此即所求的  $a, b, c$  间的关系.

1072. 在甚么条件下, 三次抛物线

$$y = x^3 + px + q$$

与  $Ox$  轴相切?

**解** 由方程  $y = x^3 + px + q$  求得  $y' = 3x^2 + p$ . 要此曲线与  $Ox$  轴相切, 必须满足

$$\begin{cases} 3x^2 + p = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 + px + q = 0. & (2) \end{cases}$$

由(2)式得  $x(x^2 + p) = -q$ , 两端平方, 则

$$x^2(x^2 + p)^2 = q^2. \quad (3)$$

以(1)式代入(3)式, 得

$$-\frac{p}{3} \cdot \left(-\frac{p}{3} + p\right)^2 = q^2,$$

即

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0,$$

此即所求的条件.

1073. 当参数  $a$  为何值时, 抛物线  $y = ax^2$  与曲线  $y = \ln x$  相切?

解 按题意, 我们有

$$(ax^2)' = (\ln x)',$$

即

$$x^2 = \frac{1}{2a} \quad (a \neq 0),$$

从而 
$$y = a \cdot \frac{1}{2a} = \frac{1}{2}.$$

同时, 由于在切点相切, 其纵坐标也必需相等, 所以

$$\ln x = \frac{1}{2}, \text{ 即 } x = \sqrt{e}.$$

最后得到

$$a = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2e}.$$

1074. 证明曲线

$$y = f(x) \quad [f(x) > 0]$$

及 
$$y = f(x)\sin ax,$$

其中  $f(x)$  为可微分的函数, 于公共点彼此相切.

证 解曲线方程

$$\begin{cases} y = f(x), \\ y = f(x)\sin ax, \end{cases}$$

得  $\sin ax = 1, x = \frac{(4k+1)\pi}{2a}$  ( $k$  为整数), 这就是两曲线

交点的横坐标. 两曲线在交点处切线的斜率分别为

$$\begin{aligned} k_1 &= f' \left( \frac{4k+1}{2a} \pi \right), \\ k_2 &= f' \left( \frac{4k+1}{2a} \pi \right) \sin \left( \frac{4k+1}{2} \pi \right) \\ &\quad + a \cos \left( \frac{4k+1}{2} \pi \right) f' \left( \frac{4k+1}{2a} \pi \right) \\ &= f' \left( \frac{4k+1}{2a} \pi \right). \end{aligned}$$

从而

$$k_1 = k_2,$$

所以两曲线在公共点彼此相切.

1075. 证明双曲线族  $x^2 - y^2 = a$  及  $xy = b$  形成一正交网, 就是说这两族中的曲线成直角相交.

证 设双曲线  $x^2 - y^2 = a$  与双曲线  $xy = b$  相交于点  $P(x, y)$ , 则在此点双曲线  $x^2 - y^2 = a$  的切线的斜率  $k_1$  满足:  $2x - 2yk_1 = 0$ , 所以,

$$k_1 = \frac{x}{y};$$

在同一点双曲线  $xy = b$  的切线的斜率  $k_2$  满足:  $y + xk_2 = 0$ , 所以,

$$k_2 = -\frac{y}{x};$$

由此得到

$$k_1 k_2 = \frac{x}{y} \cdot \left( -\frac{y}{x} \right) = -1.$$

因此, 两双曲线交成直角, 故此两曲线族形成一正交网.

1076. 证明抛物线族

$$y^2 = 4a(a - x) \quad (a > 0)$$

及  $y^2 = 4b(b + x) \quad (b > 0)$

形成正交网.

证 设抛物线  $y^2 = 4a(a - x)$  与抛物线  $y^2 = 4b(b + x)$  相交于点  $P(x, y)$ , 则在此点  $y^2 = 4a(a - x)$  的切线的斜率  $k_1$  满足:  $2yk_1 = -4a$ , 所以,

$$k_1 = -\frac{2a}{y};$$

在同一点抛物线  $y^2 = 4b(b + x)$  的切线的斜率  $k_2$  满足:  $2yk_2 = 4b$ , 所以,

$$k_2 = \frac{2b}{y};$$

由此得到

$$k_1 k_2 = -\frac{4ab}{y^2}. \quad (1)$$

但点  $P(x, y)$  同时在这两条抛物线上, 故

$$4a(a - x) = 4b(b + x).$$

于是,  $x = a - b$ , 所以

$$y^2 = 4a(a - a + b) = 4ab. \quad (2)$$

以(2)式代入(1)式, 得知在交点处, 两切线的斜率满足

$$k_1 k_2 = -1,$$

故此两切线直交. 由此可知, 该两抛物线族形成正交网.

1077. 写出曲线  $x = 2t - t^2$  及  $y = 3t - t^3$  上于(a)  $t = 0$ , (b)  $t = 1$  各点处的切线和法线的方程.

解 由于

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = 1.$$

切线方程为

$$y = x;$$

法线方程为

$$y = -x.$$

(6) 当  $t = 1$  时,

$$x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}, \frac{dy}{dx} = 3.$$

切线方程为

$$y - \frac{1}{2} = 3\left(x - \frac{3}{2}\right), \text{即 } 3x - y - 4 = 0;$$

法线方程为

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right), \text{即 } x + 3y - 3 = 0;$$

(B) 当  $t = \infty$  时,

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = -1.$$

(意即: 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, \frac{dy}{dx} \rightarrow -1$ ).

切线方程为

$$y = -x.$$

法线方程为

$$y = x.$$

1079. 写出摆线(旋轮线)

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$$

上任意一点  $t = t_0$  处的切线方程. 给出摆线的切线的作法.

**解** 因为

$$\begin{aligned}\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=t_0} &= \left. \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} \right|_{t=t_0} \\ &= \left. \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right|_{t=t_0} = \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}.\end{aligned}$$

于是,切线方程为

$$y - a(1 - \cos t_0) = \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2} \cdot [x - a(t_0 - \sin t_0)],$$

化简得

$$y - 2a = (x - at_0) \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}.$$

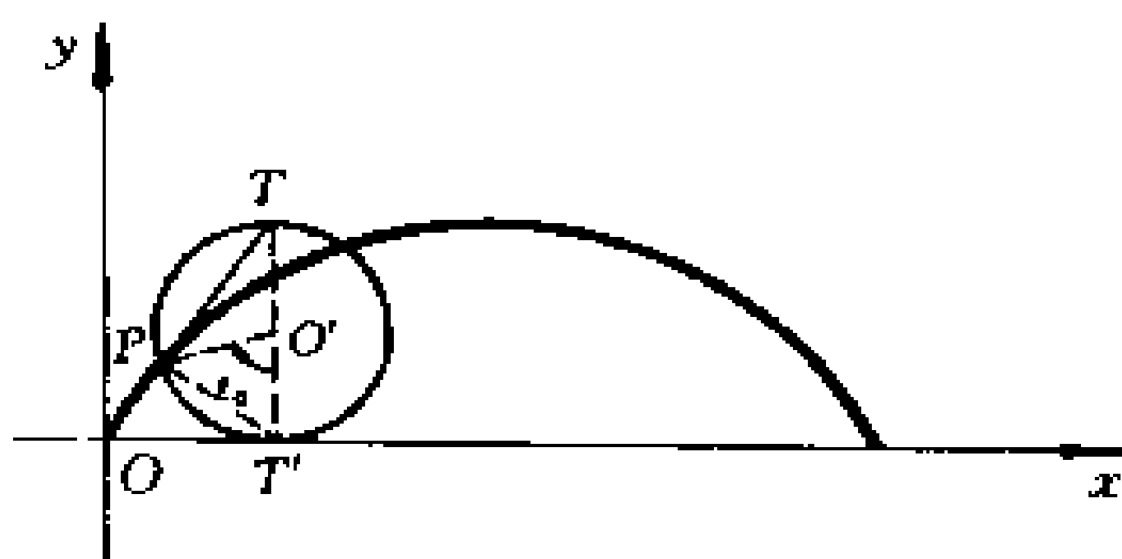


图 2.36

由此可知,切线通过点  $(at_0, 2a)$ , 其斜率为  $\operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}$ . 如图 2.36 中所示,  $\angle T'O'P = t_0$ , 而

$$OT' = \widehat{T'P} = at_0, T'T = 2a,$$

故  $T$  点的坐标为  $(at_0, 2a)$ , 它在切线上. 其次, 联接  $PT$  及  $PT'$ , 则  $PT' \perp PT$ ,

$$\begin{aligned}k_{PT} &= \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \angle PT'T' \right) = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{t_0}{2} \right) \\ &= \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}.\end{aligned}$$

这样,  $PT$  就通过点  $(at_0, 2a)$ , 且其斜率为  $\operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}$ , 所以,



直线  $PT$  即为所求的切线. 于是摆线的切线可以这样作: 先联接切点与滚动的圆的接触点(即点  $P$ ), 然后, 过  $P$  作其垂直线, 此即所求的切线.

1080. 证明曳物线

$$\begin{aligned}x &= a \left( \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), \\y &= a \sin t \quad (a > 0, 0 < t < \pi)\end{aligned}$$

有一定长的切线段.

证 切线段的长  $= \left| \frac{y}{y'_x} \right| \sqrt{1 + y'^2_x}$ , 而

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \cos t}{a \left( \frac{1}{\sin t} - \sin t \right)} = \frac{\sin t}{\cos t},$$

所以

$$\begin{aligned}\left| \frac{y}{y'_x} \right| \sqrt{1 + y'^2_x} &= \left| \frac{a \sin t}{\frac{\sin t}{\cos t}} \right| \sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} \\&= |a| |\cos t| \cdot \frac{1}{|\cos t|} \\&= |a|,\end{aligned}$$

这是一个常量, 故曳物线有定长的切线段.

写出下列曲线在指定点的切线与法线方程:

1081.  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, M(6, 6.4).$

解 由于

$$y' = -\frac{64x}{100y} = -\frac{16x}{25y},$$

从而点  $M$  处的导数

$$y'|_M = -\frac{16 \times 6}{25 \times 6.4} = -\frac{3}{5},$$

此即曲线在  $M$  点的切线的斜率.

所以, 切线方程为

$$y - 6.4 = -\frac{3}{5}(x - 6), \text{ 即 } 3x + 5y - 50 = 0;$$

法线方程为

$$y - 6.4 = \frac{5}{3}(x - 6), \text{ 即 } 5x - 3y - 10.8 = 0.$$

1082.  $xy + \ln y = 1, M(1, 1).$

**解** 先求  $y'$ . 由于

$$xy' + y + \frac{y'}{y} = 0,$$

从而

$$y' = -\frac{y^2}{x + y}, \quad y' \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -\frac{1}{2}.$$

故切线方程为

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1), \text{ 即 } x + 2y - 3 = 0;$$

法线方程为

$$y - 1 = 2(x - 1), \text{ 即 } 2x - y - 1 = 0.$$

## § 4. 函数的微分

1° 函数的微分 若自变数为  $x$  的函数  $y = f(x)$  之增量可表为下形

$$\Delta y = A(x)dx + o(dx),$$

其中  $dx = \Delta x$ , 则此增量的线性主部称为函数  $y$  的微分:

$$dy = A(x)dx$$

函数  $y = f(x)$  的微分存在的必要且充分条件为存在有限的导函数  $y' = f'(x)$ , 且有

$$dy = y' dx. \quad (1)$$

若自变数  $x$  为另一自变数的函数, 公式(1)于这种情形下仍然有效 (一阶微分的不变性).

2° 函数的微小增量的估计 为了计算可微分的函数  $f(x)$  的微小增量可利用公式

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x,$$

若  $f'(x) \neq 0$ , 当  $|\Delta x|$  充分小时, 它的相对误差可以任意地小.

特别情形, 若计算自变数  $x$  的绝对误差等于  $|\Delta x|$ , 则函数  $y = f(x)$  的绝对误差  $|\Delta y|$  和相对误差  $\delta y$  用下列公式近似地表示出来:

$$|\Delta y| \approx |f'(x)\Delta x|$$

及

$$\delta y = |[\ln f(x)]' \Delta x| = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \Delta x \right|.$$

1083. 设:

$$(a)\Delta x = 1, (b)\Delta x = 0.1, (B)\Delta x = 0.01,$$

对于函数

$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

求出: (1)  $\Delta f(1)$ , (2)  $df(1)$ , 并比较它们.

**解**  $\Delta f(1) = f(1 + \Delta x) - f(1)$

$$= (\Delta x + 1)^3 - 2(1 + \Delta x) + 1 - (1 - 2 + 1)$$

$$= \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,$$

$$df(1) = f'(1)\Delta x = (3x^2 - 2)|_{x=1} \cdot \Delta x = \Delta x,$$

将所求值列表如下:

		$\Delta f(1)$	$df(1)$
$\Delta x$		$\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$	$\Delta x$
(a)	$\Delta x = 1$	5	1
(б)	$\Delta x = 0.1$	0.131	0.1
(в)	$\Delta x = 0.01$	0.010301	0.01

从上表可以看出,当  $\Delta x$  值愈小时,  $\Delta f(1)$  与  $df(1)$  之差就愈小.

1084. 运动方程是

$$x = 5t^2,$$

其中  $t$  以秒来度量,  $x$  以公尺来度量. 设 (a)  $\Delta t = 1$  秒, (б)  $\Delta t = 0.1$  秒, (в)  $\Delta t = 0.001$  秒, 对  $t = 2$  秒的时刻, 求出路线的增量  $\Delta x$  及路线的微分  $dx$ , 并作比较.

解  $\Delta x = 5(2 + \Delta t)^2 - 5 \cdot 2^2 = 20\Delta t + 5(\Delta t)^2,$

$$dx = x'_t|_{t=2} \cdot \Delta t = 10t|_{t=2} \cdot \Delta t = 20\Delta t,$$

(a) 当  $\Delta t = 1$  秒时,

$$\Delta x = 25 \text{ 公尺}, dx = 20 \text{ 公尺};$$

(б) 当  $\Delta t = 0.1$  秒时,

$$\Delta x = 2.05 \text{ 公尺}, dx = 2 \text{ 公尺};$$

(B) 当  $\Delta t = 0.001$  秒时,

$$\Delta x = 0.020005 \text{ 公尺}, dx = 0.02 \text{ 公尺}.$$

由上可以看出, 当  $\Delta t$  愈小时,  $\Delta x - dx$  就愈小.

求下列函数  $y$  的微分:

$$1085. y = \frac{1}{x}.$$

$$\text{解 } y' = -\frac{1}{x^2}, dy = -\frac{1}{x^2}dx (x \neq 0).$$

$$1086. y = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} (a \neq 0).$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2 + x^2},$$

$$dy = \frac{dx}{a^2 + x^2}.$$

$$1087. y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) = \frac{1}{x^2 - a^2},$$

$$dy = \frac{dx}{x^2 - a^2} (|x| \neq |a|).$$

$$1088. y = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}, dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

$$1089. y = \arcsin \frac{x}{a} (a \neq 0).$$

$$\text{解 } y' = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$dy = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (|x| < |a|).$$

1090. (a)  $d(xe^x)$ ; (б)  $d(\sin x + x \cos x)$ ;

(в)  $d\left(\frac{1}{x^3}\right)$ ; (г)  $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$ ;

(д)  $d(\sqrt{a^2 + x^2})$ ; (е)  $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ ;

(ж)  $d \ln(1-x^2)$ ; (з)  $d\left(\arccos \frac{1}{|x|}\right)$ ;

(и)  $d\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \right]$

**解** (a)  $d(xe^x) = (xe^x)' dx = e^x(x+1)dx$ ;

(б)  $d(\sin x + x \cos x) = (\sin x + x \cos x)' dx$   
 $= x \sin x dx$ ;

(в)  $d\left(\frac{1}{x^3}\right) = -\frac{3}{x^4} dx \quad (x \neq 0)$ ;

(г)  $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\frac{1}{x} \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x}{x} dx$   
 $= \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} dx \quad (x > 0)$ ;

(д)  $d(\sqrt{a^2 + x^2}) = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ ;

(е)  $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} dx$   
 $= \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (|x| < 1)$ ;

$$(x) d\ln(1-x^2) = -\frac{2xdx}{1-x^2} \quad (|x| < 1);$$

$$(3) d\left(\arccos \frac{1}{|x|}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{|x|}{x} dx \\ = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1);$$

$$(u) d\left(\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \right) \\ = \left[ \frac{\cos^3 x + 2\sin^2 x \cos x}{2\cos^4 x} + \frac{1}{2\cos x} \right] dx \\ = \frac{dx}{\cos^3 x} \quad \left( x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ 为整数} \right).$$

设  $u, v, w$  为  $x$  的可微分的函数. 求函数  $y$  的微分, 设:

$$1091. y = uvw.$$

$$\text{解} \quad dy = uvdu + uwdv + uvdw.$$

$$1092. y = \frac{u}{v^2}.$$

$$\text{解} \quad dy = \frac{v^2 du - 2uv dv}{v^4} \\ = \frac{v du - 2u dv}{v^3} \quad (v \neq 0).$$

$$1093. y = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

$$\text{解} \quad dy = -\frac{1}{2(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (2u du + 2v dv)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2x}\sin x}{x^2}$$

$$= \frac{x\cos x - \sin x}{2x^3},$$

显然,上述结果对于  $x < 0$  也是正确的 ( $x \neq 0$ ).

$$(B) \frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = \frac{\cos x dx}{-\sin x dx}$$

$$= -\operatorname{ctg} x (x \neq k\pi, k \text{ 为整数});$$

$$(r) \frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)} = \frac{d}{d(\operatorname{ctg} x)} \left( \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \right)$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} = -\operatorname{tg}^2 x$$

$$\left( x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数} \right);$$

$$(D) \frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} = -1$$

$$(|x| < 1).$$

1097. 有半径为  $R = 100$  厘米及圆心角  $\alpha = 60^\circ$  的扇形. 若 (a) 其半径  $R$  增加 1 厘米; (b) 角  $\alpha$  减小  $30'$ , 则扇形面积的变化若干? 求出精确的和近似的解.

**解** 扇形面积  $A = \frac{1}{2}R^2\alpha$ , 其增量

$$\Delta A = \frac{\alpha}{2} [(R + \Delta R)^2 - R^2]$$

$$= \alpha R \Delta R + \frac{1}{2} \alpha (\Delta R)^2,$$



或

$$\Delta A = \frac{1}{2} R^2 \Delta \alpha.$$

扇形面积的微分

$$dA = R\alpha \, dR,$$

或

$$dA = \frac{1}{2} R^2 d\alpha.$$

增量是精确的解,微分是近似的解.

(a) 当  $R = 100, \alpha = \frac{\pi}{3}, \Delta R = 1$  时,

$$\Delta A = \frac{\pi}{6} (200 + 1) = 105.2 \text{ 平方厘米},$$

$$dA = 100 \cdot \frac{\pi}{3} = 104.7 \text{ 平方厘米(增加)}.$$

(6) 当  $\Delta \alpha = -\frac{\pi}{360}$  时,

$$\Delta A = \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot \left( -\frac{\pi}{360} \right) = -43.6 \text{ 平方厘米},$$

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot \left( -\frac{\pi}{360} \right) \\ &= -43.6 \text{ 平方厘米(减少)}. \end{aligned}$$

1098. 单摆振动的周期(以秒计算)按下式确定:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

其中  $l$  为摆长以厘米计,  $g = 981$  厘米 / 每秒<sup>2</sup> 为重力加速度.

为了使周期  $T$  增大 0.05 秒, 对摆长  $l = 20$  厘米的长度需要作多少修改?

**解** 周期  $T$  对摆长  $l$  的微分

$$dT = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{l}} dl = \frac{\pi dl}{\sqrt{lg}}.$$

将  $dT = 0.05$ ,  $g = 981$ ,  $l = 20$  代入上式, 即得

$$dl = \frac{0.05 \times \sqrt{981 \times 20}}{3.1416} \approx 2.23,$$

即摆长增加约 2.23 厘米.

利用函数之微分代替函数的增量, 求下列各式之近似值:

1099.  $\sqrt[3]{1.02}$ .

**解** 设  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $x_0 = 1$ ,  $\Delta x = 0.02$ , 则

$$f'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Big|_{x=1} = \frac{1}{3},$$

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = 0.0066.$$

于是

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1.02} &= f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) \\ &= 1 + 0.0066, \end{aligned}$$

即

$$\sqrt[3]{1.02} \approx 1.007.$$

1100.  $\sin 29^\circ$ .

解 设  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ ,  $\Delta x = -\frac{\pi}{180}$ , 则

$$\sin 29^\circ \approx \sin \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi}{6} = 0.4849.$$

1101.  $\cos 151^\circ$ .

解 设  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = \frac{5\pi}{6}$ ,  $\Delta x = \frac{\pi}{180}$ , 则

$$\cos 151^\circ \approx \cos \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{180} = -0.8748.$$

1102.  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 1.05$ .

解 设  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ,  $x_0 = 1$ ,  $\Delta x = 0.05$ , 则

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} 1.05 &\approx \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 + 0.05 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 0.8104(\text{弧度}) = 46^\circ 26'. \end{aligned}$$

1103.  $\lg 11$ .

解  $\lg 11 = \lg 10 + \lg 1.1 = 1 + \lg 1.1$ .

设  $f(x) = \lg x$ ,  $x_0 = 1$ ,  $\Delta x = 0.1$ , 则

$$\lg 1.1 \approx \lg 1 + \frac{0.1}{\ln 10} = \frac{0.1}{2.3026} = 0.0434.$$

于是

$$\lg 11 \approx 1.0434.$$

1104. 证明近似公式:

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a} (a > 0),$$

其中  $|x| \ll a$  (正数  $A$  和  $B$  间的关系式  $A \ll B$  表示  $A$  与  $B$  相比较时,  $A$  为高阶无穷小).

利用这个公式近似地计算:

$$(a) \sqrt{5}; \quad (6) \sqrt{34}; \quad (B) \sqrt{120}$$

并与表中的数值比较.

证 设  $f(y) = \sqrt{y}$ ,  $y_0 = a^2$ ,  $\Delta y = x$ , 则

$$\sqrt{y_0 + \Delta y} \approx \sqrt{y_0} + \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \Delta y$$

(当  $|\Delta y| \ll \sqrt{y_0}$  时).

于是,

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a}, \text{ (当 } |x| \ll a \text{ 时)}$$

$$(a) \sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1} \approx 2 + \frac{1}{4} = 2.25,$$

查表:  $\sqrt{5} = 2.24$ ;

$$(6) \sqrt{34} = \sqrt{6^2 - 2} \approx 6 - \frac{2}{2 \cdot 6} = 5.833,$$

查表:  $\sqrt{34} = 5.831$ ;

$$(B) \sqrt{120} = \sqrt{11^2 - 1} \approx 11 - \frac{1}{2 \cdot 11} = 10.9546,$$

查表:  $\sqrt{120} = 10.9545$ .

1105. 证明近似公式:

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} (a > 0).$$

其中  $|x| \ll a$ . 利用此公式近似地计算:

(a)  $\sqrt[3]{9}$ ; (б)  $\sqrt[4]{80}$ ; (в)  $\sqrt[7]{100}$ ;

(г)  $\sqrt[10]{1000}$ .

证 设  $f(y) = \sqrt[n]{y}$ ,  $y_0 = a^n$ ,  $\Delta y = x$ , 则

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a^n + x} &\approx \sqrt[n]{a^n} + \frac{x}{n \sqrt[n]{(a^n)^{n-1}}} \\ &= a + \frac{x}{na^{n-1}} (\text{当 } |x| \ll a \text{ 时}).\end{aligned}$$

(a)  $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{2^3 + 1} \approx 2 + \frac{1}{3 \cdot 2^2} = 2.083$ ,

查表:  $\sqrt[3]{9} = 2.080$ ;

(б)  $\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{3^4 - 1} \approx 3 - \frac{1}{4 \cdot 3^3} = 2.9907$ ,

查表:  $\sqrt[4]{80} = 2.9905$ ;

(в)  $\sqrt[7]{100} = \sqrt[7]{2^7 - 28} \approx 2 - \frac{28}{7 \cdot 2^6} = 1.938$ ,

查表:  $\sqrt[7]{100} = 1.931$ ;

(г)  $\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10} - 24} \approx 2 - \frac{24}{10 \cdot 2^9} = 1.9953$ ,

查表:  $\sqrt[10]{1000} = 1.9953$ .

1106. 正方形的边  $x = 2.4$  米  $\pm 0.05$  米. 由此计算所得正方

形的面积的相对误差和绝对误差如何?

**解** 正方形的面积  $A = x^2$ . 于是, 面积的相对误差为

$$\begin{aligned}\delta_A &= \left| \frac{\Delta A}{A} \right| = \left| \frac{2x\Delta x}{x^2} \right| = 2 \left| \frac{\Delta x}{x} \right| \\ &= 2 \cdot \frac{0.05}{2.4} = 4.2\% ;\end{aligned}$$

而绝对误差为

$$|\Delta A| = |2.45^2 - 2.4^2| = 0.24 \text{ 平方米}.$$

1107. 为了计算出球的体积准确到 1%, 问度量球半径  $R$  时所允许发生的相对误差如何?

**解** 球的体积  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ , 从而

$$dV = \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 dR = V \frac{3dR}{R},$$

即体积的相对误差是半径的相对误差的 3 倍:

$$\left| \frac{dV}{V} \right| = 3 \left| \frac{dR}{R} \right|.$$

因而, 半径  $R$  允许发生的相对误差为

$$\delta_R = \frac{1}{3}\delta_V \leq \frac{1}{3} \cdot 0.01 = 0.33\%.$$

1108. 借助于单摆的振动利用公式  $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$  (其中  $l$  为摆长,  $T$  为摆振动的全周期) 以求重力加速度. 当测量 (a) 摆长  $l$ , (b) 周期  $T$  时的相对误差  $\delta$  影响于值  $g$  几何?

**解** (a)  $\delta_g = \left| \frac{dg}{g} \right| = \left| \frac{dl}{l} \right|$ , 于是

$$\delta_g = \delta_l,$$

即  $g$  的相对误差等于摆长的相对误差.

$$(6) \delta_g = \left| \frac{-8\pi^2 l \cdot T^2 dT}{T^3 \cdot 4\pi^2 l} \right| = 2 \left| \frac{dT}{T} \right|, \text{ 于是}$$

$$\delta_g = 2\delta_T,$$

即  $g$  的相对误差是周期的相对误差的 2 倍.

1109. 求数  $x(x > 0)$  的常用对数的绝对误差, 设此数的相对误差等于  $\delta$ .

解 设  $f(x) = \ln x$ , 若数  $\delta$  很小, 则有

$$\ln(1 + \delta) \approx \delta.$$

因而, 所要求的绝对误差

$$|\lg(x + \Delta x) - \lg x| = \left| \lg \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \right|$$

$$= |\lg(1 + \delta)| = \frac{1}{\ln 10} \ln(1 + \delta) \approx 0.43\delta.$$

1110. 证明: 根据正切对数表所求得的角度比用具有同样多位小数的正弦对数表求得的角度更为精确.

证 正切对数函数的微分

$$d(\lg \operatorname{tg} \varphi) = \frac{d\varphi}{\ln 10 \cdot \operatorname{tg} \varphi \cos^2 \varphi}$$

$$= \frac{d\varphi}{\ln 10 \cdot \sin \varphi \cos \varphi},$$

于是

$$|d\varphi| = \ln 10 \cdot |\sin \varphi| \cdot |\cos \varphi| \cdot |d(\lg \operatorname{tg} \varphi)|; \quad (1)$$

而正弦对数函数的微分

$$d(\lg \sin \varphi) = \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sin \varphi \ln 10},$$

于是

$$|d\varphi| = \ln 10 \cdot |\sin \varphi| \cdot \left| \frac{1}{\cos \varphi} \right| \cdot |d(\lg \sin \varphi)|. \quad (2)$$

比较(1)式及(2)式的右端,由于假设确定  $\lg \sin \varphi$  与  $\lg \operatorname{tg} \varphi$  时,具有同样的误差,而  $\left| \frac{1}{\cos \varphi} \right| \geq 1 \geq |\cos \varphi|$ , 故由(2)式所确定的  $|d\varphi|$  不比(1)式的  $|d\varphi|$  小. 这就证明了求角度时用正切对数表更为精确.

## § 5. 高阶的导函数和微分

1° 基本定义 函数  $y = f(x)$  的高阶导函数由下列关系式顺次地定义出来(假设对应的运算都有意义!):

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}' \quad (n = 2, 3, \dots).$$

函数  $y = f(x)$  的高阶微分是根据下列公式顺次定义的:

$$d^n y = d(d^{n-1} y) \quad (n = 2, 3, \dots),$$

其中采取  $d^1 y = dy = y' dx$ .

若  $x$  为自变数,则应有:

$$d^2 x = d^3 x = \dots = 0.$$

在这种情形下,下列公式正确



$$= \frac{x(3 + 2x^2)}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1112.  $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

解  $y' = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$   
 $= \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$

$$y'' = \frac{3}{2} \cdot 2x \cdot (1-x^2)^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

( $|x| < 1$ ).

1113.  $y = e^{-x^2}.$

解  $y' = -2xe^{-x^2}, y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$

1114.  $y = \operatorname{tg} x.$

解  $y' = \frac{1}{\cos^2 x},$

$$y'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \left( x \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k \text{ 为整数} \right).$$

1115.  $y = (1+x^2)\operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$

解  $y' = 1 + 2x\operatorname{arctg} x,$

$$y'' = 2\operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^2}.$$

1116.  $y = \frac{\operatorname{arc} \sin x}{\sqrt{1-x^2}}.$

解  $y' = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x\operatorname{arc} \sin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{2x}{(1-x^2)^2} \\
&+ \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x\right) (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + 3x^2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \\
&= \frac{3x}{(1-x^2)} + \frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \\
&\quad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

1117.  $y = x \ln x$ .

解  $y' = 1 + \ln x, y'' = \frac{1}{x} (x > 0)$ .

1118.  $y = \ln f(x)$ .

解  $y' = \frac{f'(x)}{f(x)},$

$$y'' = \frac{f(x)f''(x) - f'^2(x)}{f^2(x)} (f(x) > 0).$$

1119.  $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$ .

解  $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$   
 $+ x \cdot \frac{1}{x} [\cos(\ln x) - \sin(\ln x)]$   
 $= 2\cos(\ln x),$   
 $y'' = -\frac{2\sin(\ln x)}{x} (x > 0).$

1120. 设  $y = e^{\sin x} \cos(\sin x)$ , 求  $y(0), y'(0)$  及  $y''(0)$ .

解  $y(0) = 1$ . 又

$$y' = e^{\sin x} [\cos x \cos(\sin x)$$

$$- \cos x \sin(\sin x)].$$

于是,

$$y'(0) = e^0[1 - 0] = 1.$$

而

$$\begin{aligned} y'' &= e^{\sin x} [\cos^2 x \cos(\sin x) - \cos^2 x \sin(\sin x) \\ &\quad - \sin x \cos(\sin x) - \cos^2 x \sin(\sin x) \\ &\quad + \sin x \sin(\sin x) - \cos^2 x \cos(\sin x)] \\ &= e^{\sin x} \{ -2\cos^2 x \sin(\sin x) \\ &\quad + \sin x [\sin(\sin x) - \cos(\sin x)] \}, \end{aligned}$$

于是,

$$y''(0) = e^0\{0 + 0\} = 0.$$

设  $u = \varphi(x)$  及  $v = \psi(x)$  为可微分二次的函数. 求  $y''$ ,  
设:

1121.  $y = u^2.$

解  $y' = 2uu',$

$$y'' = 2u'^2 + 2uu'' = 2(u'^2 + uu'').$$

1122.  $y = \ln \frac{u}{v},$

解  $y' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v},$

$$y'' = \frac{uu'' - u'^2}{u^2} - \frac{vv'' - v'^2}{v^2} (uv > 0).$$

1123.  $y = \sqrt{u^2 + v^2}$ .

解  $y' = \frac{uu' + vv'}{\sqrt{u^2 + v^2}},$

$$y'' = \frac{(uu'' + u'^2 + vv'' + v'^2) \sqrt{u^2 + v^2} - \frac{(uu' + vv')^2}{\sqrt{u^2 + v^2}}}{u^2 + v^2}$$

$$= \frac{(u^2 + v^2)(uu'' + vv'') + (u'v - v'u)^2}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$(u^2 + v^2 > 0).$

1124.  $y = u^v (u > 0).$

解  $y' = u^v \left[ v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right],$

$$y'' = u^v \left[ v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right]^2$$

$$+ u^v \left[ v'' \ln u + \frac{u'v'}{u} \right.$$

$$\left. + \frac{(u'v' + vu'')u - vu'^2}{u^2} \right]$$

$$= u^v \left[ \left( v' \ln u + \frac{u'}{u} v \right)^2 + v'' \ln u \right.$$

$$\left. + \frac{2u'v'}{u} + \frac{v}{u^2} (uu'' - u'^2) \right].$$

设  $f(x)$  为可微分三次的函数. 求  $y''$  及  $y'''$ , 设:

1125.  $y = f(x^2).$

解  $y' = 2xf'(x^2),$

$$y'' = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2),$$

$$\begin{aligned}
 y''' &= 4x f''(x^2) + 8x f''(x^2) + 8x^3 f'''(x^2) \\
 &= 12x f''(x^2) + 8x^3 f'''(x^2).
 \end{aligned}$$

1126.  $y = f\left(\frac{1}{x}\right).$

**解**  $y' = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right),$

$$y'' = \frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4} f''\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\begin{aligned}
 y''' &= -\frac{6}{x^4} f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x^5} f''\left(\frac{1}{x}\right) \\
 &\quad - \frac{4}{x^5} f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^6} f''' \left(\frac{1}{x}\right) \\
 &= -\frac{1}{x^6} f''' \left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^5} f''\left(\frac{1}{x}\right) \\
 &\quad - \frac{6}{x^4} f'\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0).
 \end{aligned}$$

1127.  $y = f(e^x).$

**解**  $y' = e^x f'(e^x),$

$$y'' = e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x),$$

$$y''' = e^{3x} f'''(e^x) + 3e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x).$$

1128.  $y = f(\ln x).$

**解**  $y' = \frac{1}{x} f'(\ln x),$

$$\begin{aligned}
 y'' &= -\frac{1}{x^2} f'(\ln x) + \frac{1}{x^2} f''(\ln x) \\
 &= \frac{1}{x^2} [f''(\ln x) - f'(\ln x)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y''' &= -\frac{2}{x^3} [f''(\ln x) - f'(\ln x)] \\
 &\quad + \frac{1}{x^3} [f'''(\ln x) - f''(\ln x)] \\
 &= \frac{1}{x^3} [f'''(\ln x) - 3f''(\ln x) + 2f'(\ln x)] \\
 &\quad (x > 0).
 \end{aligned}$$

1129.  $y = f[\varphi(x)]$ , 其中  $\varphi(x)$  是可多次微分的函数.

**解**  $y' = \varphi'(x)f'[\varphi(x)],$

$$y'' = \varphi'^2(x)f''[\varphi(x)] + \varphi''(x)f'[\varphi(x)],$$

$$\begin{aligned}
 y''' &= \varphi'^3(x)f'''[\varphi(x)] \\
 &\quad + 3\varphi'(x)\varphi''(x)f''[\varphi(x)] \\
 &\quad + \varphi'''(x)f'[\varphi(x)].
 \end{aligned}$$

1130. 对于以下二种情形: (a)  $x$  为自变量, (b)  $x$  为中间变量, 求函数  $y = e^x$  的  $d^2y$ .

**解** (a)  $dy = e^x dx, d^2y = e^x dx^2;$

$$(b) dy = e^x dx, d^2y = e^x d^2x + e^x dx^2.$$

若  $x$  为自变数, 求  $d^2y$ , 设:

1131.  $y = \sqrt{1+x^2}.$

**解**  $dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx,$

$$y'' = \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

于是,

$$d^2y = \frac{dx^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1132.  $y = \frac{\ln x}{x}.$

解  $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}, y'' = \frac{2\ln x - 3}{x^3},$

于是,

$$d^2y = \frac{2\ln x - 3}{x^3} dx^2 \quad (x > 0).$$

1133.  $y = x^x.$

解  $y' = x^x(1 + \ln x),$

$$y'' = x^x \left[ (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right],$$

于是,

$$d^2y = x^x \left[ (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right] dx^2 \quad (x > 0).$$

令  $u$  及  $v$  为变数  $x$  的可微分两次的函数, 求  $d^2y$ , 设:

1134.  $y = uv.$

解  $dy = u dv + v du,$

$$\begin{aligned} d^2y &= du dv + u d^2v + dv du + v d^2u \\ &= u d^2v + 2 du dv + v d^2u. \end{aligned}$$

1135.  $y = \frac{u}{v}.$

解  $dy = \frac{v du - u dv}{v^2},$

$$d^2y = \frac{v^2(dvdu + vd^2u - dudv - ud^2v) - 2v dv(vdu - udv)}{v^4}$$

$$= \frac{v(vd^2u - ud^2v) - 2dv(vdu - udv)}{v^3} (v \neq 0)$$

1136.  $y = u^m v^n$  ( $m$  及  $n$  为常数).

**解**  $dy = mu^{m-1}v^ndu + nu^mv^{n-1}dv,$

$$d^2y = m(m-1)u^{m-2}v^ndu^2$$

$$+ mu^{m-1}(v^nd^2u + nv^{n-1}dudv)$$

$$+ mnu^{m-1}v^{n-1}dudv$$

$$+ nu^m(n-1)v^{n-2}dv^2 + nu^mv^{n-1}d^2v$$

$$= u^{m-2}v^{n-2} \{ [m(m-1)v^2du^2$$

$$+ 2mnvdu dv + n(n-1)u^2dv^2]$$

$$+ uv(mvd^2u + nud^2v) \}.$$

1137.  $y = a^x$  ( $a > 0$ ).

**解**  $dy = a^x \ln a du,$

$$d^2y = a^x \ln^2 a \cdot du^2 + a^x \ln a \cdot d^2u$$

$$= a^x \ln a (\ln a \cdot du^2 + d^2u) (a > 0).$$

1138.  $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}.$

**解**  $dy = \frac{udu + vdv}{u^2 + v^2},$

$$d^2y = \frac{(u^2 + v^2)(du^2 + ud^2u + dv^2 + vd^2v) - 2(udu + vdv)^2}{(u^2 + v^2)^2}$$



$$= \frac{(v^2 - u^2)du^2 - 4uvdudv + (u^2 - v^2)dv^2 + (u^2 + v^2)(ud^2u + vd^2v)}{(u^2 + v^2)^2}$$

$$(u^2 + v^2 > 0).$$

1139.  $y = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}.$

解  $dy = \frac{vdu - u dv}{u^2 + v^2},$

$$d^2y = \frac{(u^2 + v^2)(vd^2u - ud^2v) - 2(udu + vdv)(vdu - u dv)}{(u^2 + v^2)^2}$$

$$= \frac{(u^2 + v^2)(vd^2u - ud^2v) + 2uv(dv^2 - du^2) + 2(u^2 - v^2)dudv}{(u^2 + v^2)^2}$$

$$(v \neq 0).$$

求以参数给出的函数  $y = y(x)$  的导函数  $y'_x$ ,  $y''_x$ ,  $y'''_x$ , 设:

1140.  $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3.$

解  $y'_x = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3}{2}(t + 1),$

$$y''_x = \frac{\frac{dy'_x}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{2}}{2 - 2t} = \frac{3}{4(1 - t)},$$

$$y'''_x = \frac{\frac{dy''_x}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{4(1 - t)^2}}{2 - 2t}$$

$$= \frac{3}{8(1 - t)^3}(t \neq 1).$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + t\right), \\
y_x'' &= \frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + t\right)}}{e^t(\cos t - \sin t)} \\
&= \frac{e^{-t}}{\sqrt{2} \cos^3\left(\frac{\pi}{4} + t\right)}, \\
y_x''' &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \left[ -\cos^{-3}\left(\frac{\pi}{4} + t\right) + 3\cos^{-4}\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \right]}{e^t(\cos t - \sin t)} \\
&= \frac{e^{-2t}(2\sin t + \cos t)}{\sqrt{2} \cos^5\left(\frac{\pi}{4} + t\right)} \left( t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \text{ 为整数} \right).
\end{aligned}$$

1144.  $x = f'(t), y = tf'(t) - f(t).$

解  $y'_x = \frac{tf''(t)}{f''(t)} = t,$

$$y_x'' = \frac{1}{f''(t)},$$

$$\begin{aligned}
y_x''' &= -\frac{\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^2}}{f''(t)} = -\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^3} \\
&\quad (f''(t) \neq 0).
\end{aligned}$$

1145. 设函数  $y = f(x)$  是可微分若干次的. 求反函数  $x = f^{-1}(y)$  的导函数  $x', x'', x''', x^{(4)}$  (设这些导函数都存在).

解  $x' = \frac{1}{y'},$

$$\begin{aligned}
x'' &= -\frac{1}{y'^2} \frac{dy'}{dy} \\
&= -\frac{1}{y'^2} \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{y''}{y'^3}, \\
x''' &= -\frac{y''' \cdot \frac{1}{y'} y'^3 - 3y'^2 \cdot y'' \cdot \frac{1}{y'} \cdot y''}{y'^6} \\
&= -\frac{y' y''' - 3y''^2}{y'^5}, \\
x^{(4)} &= -\frac{y'^5 \left( \frac{y''}{y'} y''' + y^{(4)} - 6y'' y''' \cdot \frac{1}{y'} \right)}{y'^{10}} \\
&\quad - \frac{5y'^4 \cdot y'' \cdot \frac{1}{y'} (y' y''' - 3y''^2)}{y'^{10}} \\
&= -\frac{y'^2 y^{(4)} - 10y' y'' y''' + 15y''^3}{y'^7} (y' \neq 0).
\end{aligned}$$

求由下列隐函数给出的  $y = y(x)$  的  $y'_x$ ,  $y''_x$  及  $y'''_x$ :

1146.  $x^2 + y^2 = 25$ . 在点  $M(3, 4)$  的  $y'$ ,  $y''$  及  $y'''$  等于甚么?

解  $y' = -\frac{x}{y},$

$$\begin{aligned}
y'' &= -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} \\
&= -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{25}{y^3},
\end{aligned}$$

$$y''' = \frac{75y'}{y^4} = -\frac{75x}{y^5},$$

在  $M(3, 4)$  点, 得

$$y' = -\frac{3}{4}, y'' = -\frac{25}{64}, y''' = -\frac{225}{1024}.$$

1147.  $y^2 = 2px.$

解  $y' = \frac{p}{y}, \quad y'' = -\frac{p}{y^2}y' = -\frac{p^2}{y^3},$

$$y''' = \frac{3p^2}{y^4}y' = \frac{3p^3}{y^5}(y \neq 0).$$

1148.  $x^2 - xy + y^2 = 1.$

解 对  $x$  微分, 得

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0, \quad (1)$$

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y}. \quad (2)$$

将(1)式两端再对  $x$  微分, 得

$$2 - 2y' - xy'' + 2y'^2 + 2yy'' = 0, \quad (3)$$

将(2)式所得  $y'$  代入(3)式, 得

$$y'' = \frac{6}{(x - 2y)^3}. \quad (4)$$

将(3)式两端对  $x$  微分, 得

$$-3y'' - xy''' + 6y'y'' + 2yy''' = 0, \quad (5)$$

将(2)式及(4)式代入(5)式, 得

$$y''' = \frac{54x}{(x - 2y)^5}(x \neq 2y).$$

求  $y'_x$  及  $y''_x$ , 设:

1149.  $y^2 + 2\ln y = x^4.$

解 对  $x$  微分, 得

$$2yy' + \frac{2y'}{y} = 4x^3, \quad (1)$$

再对  $x$  微分, 得

$$2y'^2 + 2yy'' + \frac{2y''}{y} - \frac{2y'^2}{y^2} = 12x^2. \quad (2)$$

由(1)式及(2)式得

$$y' = \frac{2x^3y}{1+y^2},$$

$$y'' = \frac{2x^2y}{(1+y^2)^3} [3(1+y^2)^2 + 2x^4(1-y^2)].$$

1150.  $\sqrt{x^2 + y^2} = ae^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} (a > 0).$

**解** 取对数得

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln a + \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

对  $x$  微分, 得

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2},$$

于是

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

将上式对  $x$  微分, 得

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(1+y')(x-y) - (1-y')(x+y)}{(x-y)^2} \\ &= \frac{2xy' - 2y}{(x-y)^2} = \frac{2x \cdot \frac{x+y}{x-y} - 2y}{(x-y)^2} \\ &= \frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^3} \quad (x \neq y, x \neq 0). \end{aligned}$$

1151. 设函数  $f(x)$  当  $x \leq x_0$  时有定义且可微分两次. 应当如

何选择系数  $a, b$  及  $c$ , 使函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \leq x_0, \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, & \text{若 } x > x_0 \end{cases}$$

是可微分两次的函数?

解 按题设  $F'(x)$  存在, 所以  $F(x)$  在点  $x_0$  连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} F(x) = F(x_0),$$

也即

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0+0} [a(x-x_0)^2 \\ &+ b(x-x_0) + c] = f(x_0). \end{aligned}$$

于是,  $c = f(x_0)$ . 其次, 由  $F'(x_0-0) = F'(x_0+0)$

得

$$f'(x_0) = [2a(x-x_0) + b] \big|_{x=x_0} = b,$$

再由  $F''(x_0-0) = F''(x_0+0)$  得

$$f''(x_0) = 2a,$$

于是

$$a = \frac{1}{2} f''(x_0).$$

1152. 点作直线运动的规律为

$$s = 10 + 20t - 5t^2.$$

求其运动的速度和加速度. 在  $t = 2$  的时刻, 速度与加速度等于甚么?

**解** 速度

$$v = \frac{ds}{dt} = 20 - 10t, v|_{t=2} = 0;$$

而加速度

$$j = \frac{d^2s}{dt^2} = -10, j|_{t=2} = -10.$$

1153. 点  $M(x, y)$  沿圆周  $x^2 + y^2 = a^2$  均匀地运动, 每  $T$  秒走完一圈. 求点  $M$  在  $Ox$  轴上的射影之速度  $v$  及加速度  $j$ , 设  $t = 0$  时点的位置为  $M_0(a, 0)$ .

**解** 设  $M$  点的坐标为  $(x, y)$ , 由于  $\angle M_0OM = \frac{2\pi}{T}t$ , 从而

$$x = a \cos \frac{2\pi}{T}t.$$

于是速度和加速度分别为

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{2\pi a}{T} \sin \frac{2\pi}{T}t,$$

$$j = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \cos \frac{2\pi}{T}t.$$

1154. 质点  $M(x, y)$  在铅直平面  $Oxy$  内以速度  $v_0$  沿与水平面成  $\alpha$  角的方向抛去. 建立(空气的阻力略去不计)运动的方程并计算速度  $v$  加速度  $j$  的大小及运动的轨道. 最大的高度和射程等于多少?

解 若不考虑空气的阻力,则有

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha, \\ y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

此即运动方程. 化为直角坐标方程,得

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

即轨道为一抛物线. 速度

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2 v_0 g t \sin \alpha}, \end{aligned}$$

而加速度

$$\begin{aligned} j &= \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{0 + (-g)^2} = g. \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x}{v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

在最大高度处,  $\frac{dy}{dx} = 0$ . 此时

$$x = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

于是,最大高度为



$$\begin{aligned}
 H_{\max} &= \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} \operatorname{tg} \alpha \\
 &= \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{v_0^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{g^2} \\
 &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.
 \end{aligned}$$

上式也可从  $\frac{dy}{dt} = 0$ , 解出  $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ , 再以  $t$  值代入  $y$  的表达式而得到. 在最大射程处有:  $y = 0$ . 于是

$$x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0,$$

解得

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

从而, 最大射程为  $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ .

1155. 点运动的方程为

$x = 4\sin \omega t - 3\cos \omega t$ ,  $y = 3\sin \omega t + 4\cos \omega t$ , ( $\omega$  为常数). 求运动的轨道, 速度与加速度的大小.

**解** 由于

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= 16\sin^2 \omega t + 9\cos^2 \omega t \\
 &\quad - 24\sin \omega t \cos \omega t + 9\sin^2 \omega t \\
 &\quad + 16\cos^2 \omega t + 24\sin \omega t \cos \omega t \\
 &= 25(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = 25.
 \end{aligned}$$

所以, 运动的轨道为一以原点为中心, 5 为半径的圆.

其次,速度与加速度的大小分别为

$$\begin{aligned}
 v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\
 &= \sqrt{(4\omega\cos\omega t + 3\omega\sin\omega t)^2 + (3\omega\cos\omega t - 4\omega\sin\omega t)^2} \\
 &= 5|\omega|, \\
 j &= \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{(-4\omega^2\sin\omega t + 3\omega^2\cos\omega t)^2 + (-4\omega^2\cos\omega t - 3\omega^2\sin\omega t)^2} \\
 &= 5\omega^2.
 \end{aligned}$$

求下列指定的阶的导函数:

1156.  $y = x(2x - 1)^2(x + 3)^3$ ; 求  $y^{(6)}$  及  $y^{(7)}$ .

解  $y$  是  $x$  的多项式, 最高次数为 6 次, 因而

$$y^{(6)} = 1 \cdot 2^2 \cdot 1^3 \cdot 6! = 4 \cdot 6! = 2880,$$

$$y^{(7)} = 0.$$

1157.  $y = \frac{a}{x^m}$ ; 求  $y'''$ .

解  $y' = -amx^{-m-1},$

$$y'' = am(m+1)x^{-m-2},$$

$$\begin{aligned}
 y''' &= -am(m+1)(m+2)x^{-m-3} \\
 &= -\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}} (x \neq 0).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_{100}^1 \cdot \left[ (1-x)^{-\frac{1}{2}} \right]^{(99)} \\
& = (1+x) \cdot \frac{199!!}{2^{100}} (1-x)^{-\frac{201}{2}} \\
& \quad + 100 \cdot \frac{197!!}{2^{99}} (1-x)^{-\frac{199}{2}} \\
& = \frac{197!! \cdot (399-x)}{2^{100} (1-x)^{100} \sqrt{1-x}} (x < 1).
\end{aligned}$$

1161.  $y = x^2 e^{2x}$ ; 求  $y^{(20)}$ .

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad y^{(20)} &= x^2 (e^{2x})^{(20)} + 2xC_{20}^1 \cdot (e^{2x})^{(19)} \\
&\quad + 2C_{20}^2 (e^{2x})^{(18)} \\
&= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95).
\end{aligned}$$

1162.  $y = \frac{e^x}{x}$ ; 求  $y^{(10)}$ .

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad y^{(10)} &= \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i e^x \cdot \left( \frac{1}{x} \right)^{(10-i)} \\
&= e^x \sum_{i=0}^{10} (-1)^i \frac{A_{10}^i}{x^{i+1}},
\end{aligned}$$

其中  $A_{10}^i = 10 \cdot 9 \cdots (11-i)$  及  $A_{10}^0 = 1$ .

1163.  $y = x \ln x$ ; 求  $y^{(5)}$ .

$$\text{解} \quad y' = 1 + \ln x, \quad y'' = \frac{1}{x},$$

$$y^{(5)} = -\frac{3!}{x^4} (x > 0).$$

1164.  $y = \frac{\ln x}{x}$ ; 求  $y^{(5)}$ .

$$\text{解 } y' = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

$$y'' = - \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4}$$

$$= - \frac{3 - 2\ln x}{x^3}$$

$$y''' = - \frac{-\frac{2}{x} \cdot x^3 - 3x^2(3 - 2\ln x)}{x^6}$$

$$= \frac{11 - 6\ln x}{x^4},$$

$$y^{(4)} = \frac{-\frac{6}{x} \cdot x^4 - 4x^3(11 - 6\ln x)}{x^8}$$

$$= - \frac{50 - 24\ln x}{x^5},$$

$$y^{(5)} = - \frac{-\frac{24}{x} \cdot x^5 - 5x^4(50 - 24\ln x)}{x^{10}}$$

$$= \frac{274 - 120\ln x}{x^6} (x > 0).$$

1165.  $y = x^2 \sin 2x$ ; 求  $y^{(50)}$

$$\text{解 } y^{(50)} = x^2 (\sin 2x)^{(50)} + C_{50}^1 \cdot 2x \cdot (\sin 2x)^{(49)}$$

$$+ 2C_{50}^2 (\sin 2x)^{(48)}$$

$$= 2^{50} x^2 \sin \left( 2x + \frac{50}{2} \pi \right)$$

$$+ 100x \cdot 2^{49} \sin \left( 2x + \frac{49}{2} \pi \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{50 \cdot 49}{1 \cdot 2} \cdot 2^{49} \cdot \sin\left(2x + \frac{48}{2}\pi\right) \\
& = 2^{50}(-x^2 \sin 2x + 50x \cos 2x \\
& \quad + \frac{1225}{2} \sin 2x).
\end{aligned}$$

1166.  $y = \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$ , 求  $y'''$ .

解  $y''' = \cos 3x \left( \frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} \right)'''$

$$\begin{aligned}
& + C_3^1 (\cos 3x)' \left( \frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} \right)'' \\
& + C_3^2 (\cos 3x)'' \left( \frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} \right)', \\
& + (\cos 3x)''' \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} \\
& = -\frac{28}{3^3} (-3)^3 \cdot \frac{\cos 3x}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}} \\
& \quad + 3(-3 \sin 3x) \cdot \left( \frac{4}{3^2} \right) (-3)^2 \\
& \quad \cdot \frac{1}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}} + 3 \cdot (-3^2 \cos 3x) \cdot \left( -\frac{1}{3} \right) \\
& \quad \cdot (-3) \cdot \frac{1}{(1-3x)^{\frac{4}{3}}} + 3^3 \sin 3x \\
& \quad \cdot \frac{1}{(1-3x)^{\frac{1}{3}}} \\
& = \frac{28 - 27(1-3x)^2}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}} \cos 3x
\end{aligned}$$

$$+ \frac{27(1-3x)^2 - 36}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}} \sin 3x \left( x \neq \frac{1}{3} \right).$$

1167.  $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$ ; 求  $y^{(10)}$ .

**解** 利用三角函数和, 差与其积的互化公式, 将  $y$  化简得

$$y = \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 6x + \frac{1}{4} \sin 2x.$$

于是,

$$\begin{aligned} y^{(10)} &= \frac{1}{4} \cdot 4^{10} \sin \left( 4x + \frac{10}{2}\pi \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \cdot 6^{10} \sin \left( 6x + \frac{10}{2}\pi \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot 2^{10} \sin \left( 2x + \frac{10}{2}\pi \right) \\ &= -2^{16} \sin 4x + 2^8 \cdot 3^{10} \sin 6x - 2^8 \sin 2x. \end{aligned}$$

1168.  $y = x \operatorname{sh} x$ ; 求  $y^{(100)}$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } y^{(100)} &= x(\operatorname{sh} x)^{(100)} + C_{100}^1 (\operatorname{sh} x)^{(99)} \\ &= x \operatorname{sh} x + 100 \operatorname{ch} x. \end{aligned}$$

1169.  $y = e^x \cos x$ ; 求  $y^{(4)}$ .

$$\text{解 } y' = e^x (\cos x - \sin x),$$

$$\begin{aligned} y'' &= e^x [(\cos x - \sin x) + (-\sin x - \cos x)] \\ &= -2e^x \sin x, \end{aligned}$$

$$y''' = -2e^x (\sin x + \cos x),$$

$$y^{(4)} = -2e^x [(\sin x + \cos x) + (\cos x - \sin x)]$$

$$= -4e^x \cos x.$$

1170.  $y = \sin^2 x \ln x$ ; 求  $y^{(6)}$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \ln x \\ &= \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cos 2x \cdot \ln x. \\ y^{(6)} &= \frac{(-1)^5}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{x^6} \\ &\quad - \frac{1}{2} (\cos 2x \cdot \ln x)^{(6)} \\ &= -\frac{60}{x^6} + \left( \frac{144}{x^5} - \frac{160}{x^3} + \frac{96}{x} \right) \sin 2x \\ &\quad + \left( \frac{60}{x^6} - \frac{180}{x^4} + \frac{120}{x^2} + 32 \ln x \right) \cos 2x. \end{aligned}$$

于下列各例中, 视  $x$  为自变数, 求指定的阶的微分.

1171.  $y = x^5$ ; 求  $d^5 y$ .

$$\text{解} \quad d^5 y = 5! dx^5 = 120 dx^5.$$

1172.  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ; 求  $d^3 y$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad d^3 y &= \left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{3}{2} \right) \left( -\frac{5}{2} \right) x^{-\frac{7}{2}} dx^3 \\ &= -\frac{15}{8x^3 \cdot \sqrt{x}} dx^3 (x > 0). \end{aligned}$$

1173.  $y = x \cos 2x$ ; 求  $d^{10} y$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad d^{10} y &= (x \cos 2x)^{(10)} dx^{10} \\ &= \left[ 2^{10} x \cos \left( 2x + \frac{10\pi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 10 \cdot 2^9 \cos\left(2x + \frac{9}{2}\pi\right) dx^{10} \\
& = -1024(x \cos 2x + 5 \sin 2x) dx^{10}.
\end{aligned}$$

1174.  $y = e^x \ln x$ ; 求  $d^4 y$ .

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad d^4 y &= (e^x \ln x)^{(4)} dx^4 \\
&= e^x \left( \ln x + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{6}{x^4} \right) dx^4.
\end{aligned}$$

1175.  $y = \cos x \cdot \operatorname{ch} x$ ; 求  $d^6 y$ .

$$\text{解} \quad d^6 y = (\cos x \cdot \operatorname{ch} x)^{(6)} dx^6 = 8 \sin x \operatorname{sh} x dx^6.$$

设  $u$  为  $x$  的可微分足够多次的函数, 于下列各例中求指定的阶的微分.

1176.  $y = u^2$ ; 求  $d^{10} y$ .

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad d^{10} y &= d^{10}(u \cdot u) = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i d^{10-i} u \cdot d^i u \\
&= u d^{10} u + 10 d^9 u \cdot du + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} d^8 u \cdot d^2 u \\
&\quad + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^7 u d^3 u \\
&\quad + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^6 u d^4 u \\
&\quad + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (d^5 u)^2 \\
&\quad + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^4 u d^6 u \\
&\quad + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 u d^7 u + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} d^2 u d^8 u
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + 10dud^9u + ud^{10}u \\
& = 2ud^{10}u + 20dud^9u + 90d^2ud^8u \\
& \quad + 240d^3ud^7u + 420d^4ud^6u + 252(d^5u)^2.
\end{aligned}$$

1177.  $y = e^u$ ; 求  $d^4y$ .

解  $dy = e^u du,$

$$d^2y = e^u du^2 + e^u d^2u,$$

$$d^3y = e^u [(du^3 + dud^2u) + d(du^2) + d^3u]$$

$$= e^u (du^3 + 3dud^2u + d^3u),$$

$$d^4y = e^u [(du^4 + 3du^2d^2u + dud^3u)$$

$$+ d(du^2 \cdot du) + 3d(dud^2u) + d^4u]$$

$$= e^u (du^4 + 6du^2d^2u + 3d^2u^2 + 4dud^3u$$

$$+ d^4u).$$

1178.  $y = \ln u$ ; 求  $d^3y$ .

解  $dy = \frac{1}{u} du,$

$$d^2y = -\frac{1}{u^2} du^2 + \frac{1}{u} d^2u,$$

$$d^3y = \frac{2}{u^3} du^3 - \frac{2}{u^2} dud^2u - \frac{1}{u^2} d^2u du$$

$$+ \frac{1}{u} d^3u$$

$$= \frac{2}{u^3} du^3 - \frac{3}{u^2} dud^2u + \frac{1}{u} d^3u.$$

1179. 视  $x$  为某个自变数的函数, 由函数  $y = f(x)$  求  $d^2y, d^3y$  及  $d^4y$ .

**解**  $dy = f'(x)dx$

$$d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$$

$$d^3y = f'''(x)dx^3 + 3f''(x)dx d^2x + f'(x)d^3x,$$

$$\begin{aligned} d^4y &= f^{(4)}(x)dx^4 + 3f'''(x)dx^2 d^2x \\ &\quad + 3f'''(x)dx^2 d^2x + 3f''(x)(d^2x)^2 \\ &\quad + dx d^3x + f''(x)dx d^3x + f'(x)d^4x \\ &= f^{(4)}(x)dx^4 + 6f'''(x)dx^2 d^2x \\ &\quad + 4f''(x)dx d^3x + 3f''(x)(d^2x)^2 \\ &\quad + f'(x)d^4x. \end{aligned}$$

1180. 以变量  $x$  和  $y$  的逐次微分来表示函数  $y = f(x)$  的导函数  $y''$  及  $y'''$ , 但不假定  $x$  为自变量.

**解**  $y' = \frac{dy}{dx},$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^3}, \end{aligned}$$

$$y''' = \frac{d\left(\frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}\right)}{dx}$$

$$= \frac{dx \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^3x & d^3y \end{vmatrix} - 3d^2x \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^5}.$$

1181. 证明: 函数

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

其中  $C_1$  及  $C_2$  为任意的常数, 满足方程

$$y'' + y = 0.$$

证  $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x,$

$$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x = -y,$$

所以

$$y'' + y = 0.$$

1182. 证明: 函数

$$y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x,$$

其中  $C_1$  及  $C_2$  为任意的常数, 满足方程

$$y'' - y = 0.$$

证  $y' = C_1 \operatorname{sh} x + C_2 \operatorname{ch} x,$

$$y'' = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x = y,$$

所以

$$y'' - y = 0.$$

1183. 证明: 函数

$$- C_1 \sin(\ln x)] \},$$

于是,

$$\begin{aligned} & x^2 y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y \\ &= x^n \{ (n^2 - n - 1)[C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)] \\ &+ (2n - 1)[C_2 \cos(\ln x) - C_1 \sin(\ln x)] \} \\ &+ (1 - 2n)x^n \{ n[C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)] \\ &+ [C_2 \cos(\ln x) - C_1 \sin(\ln x)] \} \\ &+ (1 + n^2)x^n [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

1185. 证明: 函数

$$\begin{aligned} y = & e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left( C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\ & + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left( C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned}$$

其中  $C_1, C_2, C_3$  及  $C_4$  为任意常数, 满足方程

$$y^{(4)} + y = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad y' = & e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left( \frac{C_1}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right. \\ & \left. - \frac{C_1}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\ & + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left( -\frac{C_3}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{C_4}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_3}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \\ & + \frac{C_4}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \Bigg), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left( \frac{C_1}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right. \\ & - \frac{C_1}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \\ & - \frac{C_1}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \\ & \left. - \frac{C_1}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_2}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\ & + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left( \frac{C_3}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_4}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right. \\ & + \frac{C_3}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \\ & + \frac{C_3}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \\ & \left. - \frac{C_3}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\ & = e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left( C_2 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - C_1 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\ & + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left( C_3 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - C_4 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned}$$

$$y^{(4)} = (y'')'' = e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left( -C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right.$$

$$\begin{aligned}
& -C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \Big) \\
& + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left( -C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\
& = -y,
\end{aligned}$$

于是,

$$y^{(4)} + y = 0.$$

1186. 证明:若函数  $f(x)$  有  $n$  阶导函数,则

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

**证** 每求一次导函数,均要乘以因子  $(ax+b)' = a$ ,  
所以.

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

1187. 若  $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ , 求  $P^{(n)}(x)$ .

**解**  $P'(x) = a_0 n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$

$$P''(x) = a_0 n(n-1) x^{n-2} + a_1 (n-1)(n-2) x^{n-3}$$

$$+ \cdots + a_{n-2}$$

.....

$$P^{(n)}(x) = n! a_0.$$

求  $y^{(n)}$ , 设:

1188.  $y = \frac{ax+b}{cx+d}.$

$$\text{解 } y' = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2};$$

$$y'' = -\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3};$$

利用数学归纳法,可证得

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!}{(cx+d)^{n+1}} \\ \left(x \neq -\frac{d}{c}, c \neq 0\right).$$

事实上,对于  $n=2$  等式成立,设对于  $n$  等式成立,则对于  $n+1$  有

$$y^{(n+1)} = \frac{-(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!(n+1)(cx+d)^n \cdot c}{(cx+d)^{2(n+1)}} \\ = \frac{(-1)^{(n+1)-1}c^{(n+1)-1}(ad-bc)(n+1)!}{(cx+d)^{(n+1)+1}}$$

即对于  $n+1$  等式也成立,于是得证.

$$1189. y = \frac{1}{x(1-x)}.$$

$$\text{解 } y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}.$$

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} \\ = n! \left[ \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \right] \\ (x \neq 0, x \neq 1).$$

$$1190. y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$\text{解 } y = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

$$y^{(n)} = (-1)^n n! \left[ \frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right] \\ (x \neq 1, x \neq 2).$$

1191.  $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}.$

解  $y^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) \cdots \\ \left(-\frac{2n-1}{2}\right) (-2)^n (1-2x)^{-\frac{2n+1}{2}} \\ = \frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}} \left(x < \frac{1}{2}\right).$

1192.  $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}.$

解  $y = \frac{(x+1)-1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{\frac{1}{3}} - (1+x)^{-\frac{1}{3}}.$

$$y^{(n)} = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) \cdots \\ \left(-\frac{3n-5}{3}\right) (1+x)^{-\frac{3n-2}{3}} \\ - \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) \cdots \\ \left(-\frac{3n-2}{3}\right) (1+x)^{-\frac{3n+1}{3}} \\ = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 4 \cdots (3n-5)}{3^n (1+x)^{n+\frac{1}{3}}} [2(1+x) \\ + (3n-2)] \\ = \frac{(-1)^{n+1} 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-5)(3n+2x)}{3^n (1+x)^{n+\frac{1}{3}}}$$



$$(n \geqslant 2; x \neq -1).$$

$$1193. y = \sin^2 x.$$

$$\text{解 } y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x,$$

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (y')^{(n-1)} = (\sin 2x)^{(n-1)} \\ &= 2^{n-1} \sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right) \\ &= -2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n}{2}\pi\right). \end{aligned}$$

$$1194. y = \cos^2 x.$$

$$\text{解 } y' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x,$$

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= -(\sin 2x)^{(n-1)} \\ &= -2^{n-1} \sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right) \\ &= 2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n}{2}\pi\right). \end{aligned}$$

$$1195. y = \sin^3 x.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y &= \sin x \sin^2 x = \frac{1}{2} \sin x (1 - \cos 2x) \\ &= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sin x \cos 2x \\ &= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x. \end{aligned}$$

$$y^{(n)} = \frac{3}{4} \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) - \frac{3^n}{4} \sin\left(3x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

$$1196. y = \cos^3 x.$$

$$\text{解 } y = \cos x \cos^2 x = \frac{1}{2} \cos x (1 + \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x \cos 2x$$

$$= \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x.$$

$$y^{(n)} = \frac{3}{4} \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) + \frac{3^n}{4} \cos\left(3x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

$$1197. y = \sin ax \sin bx.$$

$$\text{解 } y = \frac{1}{2} \cos(a-b)x - \frac{1}{2} \cos(a+b)x.$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} (a-b)^n \cos\left[(a-b)x + \frac{n}{2}\pi\right] \\ - \frac{1}{2} (a+b)^n \cos\left[(a+b)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

$$1198. y = \cos ax \cos bx.$$

$$\text{解 } y = \frac{1}{2} \cos(a-b)x + \frac{1}{2} \cos(a+b)x.$$

$$y^{(n)} = \frac{(a-b)^n}{2} \cos\left[(a-b)x + \frac{n}{2}\pi\right] \\ + \frac{1}{2} (a+b)^n \cos\left[(a+b)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

$$1199. y = \sin ax \cos bx.$$

$$\text{解 } y = \frac{1}{2} \sin(a+b)x + \frac{1}{2} \sin(a-b)x,$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} (a+b)^n \sin\left[(a+b)x + \frac{n}{2}\pi\right] \\ + \frac{1}{2} (a-b)^n \sin\left[(a-b)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

1200.  $y = \sin^2 ax \cos bx$ .

解 
$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \cos bx (1 + \cos 2ax) \\ &= \frac{1}{2} \cos bx + \frac{1}{4} \cos (2a + b)x \\ &\quad + \frac{1}{4} \cos (2a - b)x. \\ y^{(n)} &= \frac{1}{2} b^n \cos \left( bx + \frac{n}{2} \pi \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} (2a + b)^n \cos \left[ (2a + b)x + \frac{n}{2} \pi \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} (2a - b)^n \cos \left[ (2a - b)x + \frac{n}{2} \pi \right]. \end{aligned}$$

1201.  $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ .

解 
$$\begin{aligned} y &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4x) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x. \\ y^{(n)} &= 4^{n-1} \cos \left( 4x + \frac{n}{2} \pi \right). \end{aligned}$$

1202.  $y = x \cos ax$ .

解 
$$\begin{aligned} y^{(n)} &= x(\cos ax)^{(n)} + n(\cos ax)^{(n-1)} \\ &= a^n x \cos \left( ax + \frac{n}{2} \pi \right) \\ &\quad + na^{n-1} \cos \left( ax + \frac{n-1}{2} \pi \right) \\ &= a^n x \cos \left( ax + \frac{n}{2} \pi \right) \end{aligned}$$

$$+ na^{n-1} \sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1203.  $y = x^2 \sin ax.$

解 
$$\begin{aligned} y^{(n)} &= a^n x^2 \sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right) \\ &\quad + 2na^{n-1} x \sin\left(ax + \frac{n-1}{2}\pi\right) \\ &\quad + n(n-1)a^{n-2} \sin\left(ax + \frac{n-2}{2}\pi\right) \\ &= a^n \left[ x^2 - \frac{n(n-1)}{a^2} \right] \sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right) \\ &\quad - 2na^{n-1} x \cos\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right). \end{aligned}$$

1204.  $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}.$

解 
$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (-1)^n (x^2 + 2x + 2)e^{-x} \\ &\quad + 2(-1)^{n-1} (x + 1)e^{-x} \cdot n \\ &\quad + (-1)^{n-2} n(n-1)e^{-x} \\ &= (-1)^n e^{-x} [x^2 - 2(n-1)x \\ &\quad + (n-1)(n-2)]. \end{aligned}$$

1205.  $y = \frac{e^x}{x}.$

解 
$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \sum_{k=0}^n C_n^k e^x \left(\frac{1}{x}\right)^k \\ &= e^x \left\{ \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{x^{k+1}} \right\}. \end{aligned}$$

1206.  $y = e^x \cos x.$

1209.  $y = e^{ax}P(x)$ , 其中  $P(x)$  为多项式.

$$\begin{aligned}\text{解 } y^{(n)} &= e^{ax} [a^n P(x) + C_n^1 a^{n-1} P'(x) \\ &\quad + \cdots + P^{(n)}(x)].\end{aligned}$$

1210.  $y = x \operatorname{sh} x$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } y^{(n)} &= x(\operatorname{sh} x)^{(n)} + n(\operatorname{sh} x)^{(n-1)} \\ &= \frac{x}{2} [e^x - (-1)^n e^{-x}] \\ &\quad + \frac{n}{2} [e^x - (-1)^{n-1} e^{-x}] \\ &= \frac{1}{2} [(x+n)e^x - (-1)^n (x-n)e^{-x}] \\ &= \frac{1}{2} [(x+n)(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) \\ &\quad - (-1)^n (x-n)(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)] \\ &= \frac{1}{2} \{ [(x+n) - (-1)^n (x-n)] \operatorname{ch} x \\ &\quad + [(x+n) + (-1)^n (x-n)] \operatorname{sh} x \}.\end{aligned}$$

1211. 求  $d^n y$ , 设  $y = x^n e^x$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } d^n y &= y^{(n)} dx^n \\ &= e^x \left[ x^n + n^2 x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + n! \right] dx^n.\end{aligned}$$

1212. 求  $d^n y$ , 设  $y = \frac{\ln x}{x}$ .

$$\text{解 } d^n y = y^{(n)} dx^n$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \left( \frac{1}{x} \right)^{(n)} \ln x + n \cdot \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} \right)^{(n-1)} \right. \\
&\quad \left. + C_n^2 \left( -\frac{1}{x^2} \right) \left( \frac{1}{x} \right)^{(n-2)} \right. \\
&\quad \left. + \dots + \frac{1}{x} (\ln x)^{(n)} \right] dx^n \\
&= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left[ \ln x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] dx^n (x > 0).
\end{aligned}$$

1213. 证明等式:

$$\begin{aligned}
&(1) [e^{ax} \sin(bx + c)]^{(n)} \\
&= e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \sin(bx + c + n\varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{及 } (2) [e^{ax} \cos(bx + c)]^{(n)} \\
&= e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \cos(bx + c + n\varphi),
\end{aligned}$$

$$\text{其中 } \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ 及 } \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\begin{aligned}
&\text{证 } (1) [e^{ax} \sin(bx + c)]' \\
&= e^{ax} [a \sin(bx + c) + b \cos(bx + c)] \\
&= \sqrt{a^2 + b^2} e^{ax} \left[ \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(bx + c) \right. \\
&\quad \left. + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(bx + c) \right] \\
&= \sqrt{a^2 + b^2} e^{ax} \sin(bx + c + \varphi),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{其中 } \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ 及 } \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\
&[e^{ax} \sin(bx + c)]''
\end{aligned}$$

$$= (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} e^{ax} \sin(bx + c + 2\varphi),$$

.....

利用数学归纳法可证得

$$\begin{aligned} & [e^{ax} \sin(bx + c)]^{(n)} \\ &= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin(bx + c + n\varphi). \end{aligned}$$

(2) 同理可证

$$\begin{aligned} & [e^{ax} \cos(bx + c)]^{(n)} \\ &= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \cos(bx + c + n\varphi). \end{aligned}$$

1214. 求  $y^{(n)}$ , 设:

$$(a) y = \cosh x \cos bx; \quad (b) y = \cosh x \sin bx;$$

$$(c) y = \sinh x \cos bx; \quad (d) y = \sinh x \sin bx.$$

解 (a)  $y = \frac{1}{2} e^{ux} \cos bx + \frac{1}{2} e^{-ax} \cos bx,$

利用 1213 题(2) 的结果, 得

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{1}{2} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} [e^{ax} \cos(bx + n\varphi) \\ &\quad + e^{-ax} \cos(bx + n\pi - n\varphi)] \\ &= \frac{1}{2} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left\{ e^{ax} \left[ \cos \left( bx \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{n}{2}\pi \right) \cos \left( n\varphi - \frac{n\pi}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin \left( bx + \frac{n}{2}\pi \right) \sin \left( n\varphi - \frac{n}{2}\pi \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e^{-ax} \left[ \cos \left( bx + \frac{n}{2} \pi \right) \cos \left( n\varphi - \frac{n}{2} \pi \right) \right. \\
& \left. + \sin \left( bx + \frac{n}{2} \pi \right) \sin \left( n\varphi - \frac{n}{2} \pi \right) \right] \Big\} \\
& = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left\{ \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \cos \left( bx + \frac{n}{2} \pi \right) \right. \\
& \quad \cdot \cos \left( n\varphi - \frac{n}{2} \pi \right) - \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \\
& \quad \cdot \sin \left( bx + \frac{n}{2} \pi \right) \sin \left( n\varphi - \frac{n}{2} \pi \right) \Big\} \\
& = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left[ \cos \left( n\varphi - \frac{n}{2} \pi \right) \right. \\
& \quad \cdot \operatorname{ch} ax \cos \left( bx + \frac{n}{2} \pi \right) \\
& \quad \left. - \sin \left( n\varphi - \frac{n}{2} \pi \right) \operatorname{sh} ax \sin \left( bx + \frac{n}{2} \pi \right) \right]
\end{aligned}$$

同样方法可求得：

$$\begin{aligned}
(6) y^{(n)} &= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left[ \cos \left( n\varphi - \frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{ch} ax \right. \\
&\quad \cdot \sin \left( bx + \frac{n}{2} \pi \right) + \sin \left( n\varphi - \frac{n}{2} \pi \right) \operatorname{sh} ax \\
&\quad \left. \cdot \cos \left( bx + \frac{n}{2} \pi \right) \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{B}) y^{(n)} &= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left[ \sin n\varphi \operatorname{ch} ax \sin \left( bx + \frac{n}{2} \pi \right) \right. \\
&\quad \left. + \cos n\varphi \operatorname{sh} ax \cos \left( bx + \frac{n}{2} \pi \right) \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Gamma) y^{(n)} &= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left[ -\sin n\varphi \operatorname{ch} ax \cos \left( bx + \frac{n}{2} \pi \right) \right. \\
&\quad \left. + \cos n\varphi \operatorname{sh} ax \sin \left( bx + \frac{n}{2} \pi \right) \right].
\end{aligned}$$

其中  $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$



1215. 将函数

$$f(x) = \sin^{2p} x,$$

其中  $p$  为自然数, 化为三角多项式:

$$f(x) = \sum_{k=0}^p A_k \cos 2kx,$$

以求  $f^{(n)}(x)$ .

**解** 设  $t = \cos x + i \sin x$ , 则

$$\sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t})$$

其中  $\bar{t}$  为  $t$  的共轭复数,

于是

$$\begin{aligned} \sin^{2p} x &= \frac{1}{(2i)^{2p}} (t - \bar{t})^{2p} \\ &= \frac{1}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k t^{2p-k} (-1)^k \bar{t}^k \\ &= (-1)^p \frac{1}{(2i)^{2p}} C_{2p}^p + \frac{2}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^p C_{2p}^k (-1)^k \\ &\quad \cdot \cos(2p - 2k)x. \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} (\sin^{2p} x)^{(n)} &= \frac{2}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k (-1)^k (2p \\ &\quad - 2k)^n \cos \left[ (2p - 2k)x + \frac{n}{2}\pi \right] \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p+k} 2^{n-2p+1} (p-k)^n \\ &\quad C_{2p}^k \cos \left[ (2p - 2k)x + \frac{n}{2}\pi \right]. \end{aligned}$$

1216. 设:

$$(a) f(x) = \sin^{2p+1} x; \quad (b) f(x) = \cos^{2p} x;$$

$$(B) f(x) = \cos^{2p+1} x,$$

其中  $p$  为正整数, 求  $f^{(n)}(x)$ .

**解** (a) 设  $t = \cos x + i \sin x$ , 则

$$\begin{aligned} i \sin x &= \frac{1}{2i}(t - t^{-1}), \\ \sin^{2p+1} x &= \frac{1}{(2i)^{2p+1}} \sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k t^{2p+1-k} (-1)^k t^{-k} \\ &= \frac{1}{(2i)^{2p+1}} \sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k (-1)^k [\cos(2p+1-2k)x + i \sin(2p+1-2k)x] \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} 2^{-2p} C_{2p+1}^k \sin(2p+1-2k)x. \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_{2p+1}^k \frac{(2p+1-2k)^n}{2^{2p}} \\ &\quad \cdot \sin\left[(2p+1-2k)x + \frac{n}{2}\pi\right] \end{aligned}$$

类似 1215 题及本题(a) 的方法, 可求得:

$$\begin{aligned} (b) f^{(n)}(x) &= (\cos^{2p} x)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} 2^{n-2p+1} (p-k)^n C_{2p}^k \cos\left[(2p-2k)x + \frac{n}{2}\pi\right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B) f^{(n)}(x) &= (\cos^{2p+1} x)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{(2p+1-2k)^n}{2^{2p}} C_{2p+1}^k \cos\left[(2p+1-2k)x + \frac{n}{2}\pi\right]; \end{aligned}$$

$$-2k)x + \frac{n}{2}\pi\}.$$

1217. 利用恒等式

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i} \right)$$

证明

$$\left( \frac{1}{x^2 + 1} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1)\operatorname{arctg} x].$$

证 将复数  $x + i$  及  $x - i$  化成下列形式:

$$x + i = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

$$x - i = r(\cos\theta - i\sin\theta).$$

其中  $r = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\theta = \operatorname{arctg} x$ .

于是

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{x^2 + 1} \right)^{(n)} &= \frac{1}{2i} \left[ \left( \frac{1}{x - i} \right)^{(n)} - \left( \frac{1}{x + i} \right)^{(n)} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left[ \frac{(-1)^n n!}{(x - i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x + i)^{n+1}} \right] \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2i(x^2 + 1)^{\frac{n+1}{2}}} [(x + i)^{n+1} \\ &\quad - (x - i)^{n+1}] \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2i(x^2 + 1)^{\frac{n+1}{2}}} \{ r^{n+1} [\cos(n+1)\theta \\ &\quad + i\sin(n+1)\theta] - r^{n+1} [\cos(n+1)\theta \\ &\quad - i\sin(n+1)\theta] \} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(x^2 + 1)^{\frac{n+1}{2}}} r^{n+1} \sin(n+1)\theta \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(x^2 + 1)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1)\operatorname{arctg} x], \end{aligned}$$

所以,

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1)\operatorname{arctg} x].$$

1218. 求函数  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  的  $n$  阶导函数.

**解**  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$

利用 1217 题的结果, 得

$$\begin{aligned} f^n(x) &= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}} \sin[n \operatorname{arctg} x] \\ &= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right) \\ &\quad (x \neq 0). \end{aligned}$$

求  $f^{(n)}(0)$ , 设:

1219. (a)  $f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1+x)};$

(b)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}.$

**解** (a)  $f(x) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-2x} \right).$

于是,

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{3} \left[ \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} + \frac{n! 2^{n+1}}{(1-2x)^{n+1}} \right].$$

所以

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{3} [(-1)^n + 2^{n+1}].$$

(b)  $f(x) = -\sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$

于是,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n-3)!!}{2^n} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}}$$

$$+ \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}}.$$

所以

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \frac{(2n-3)!!}{2^n} + \frac{(2n-1)!!}{2^n} \\ &= \frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}} \quad (n > 1). \end{aligned}$$

1220. (a)  $f(x) = x^2 e^{ax}$ ; (6)  $f(x) = \arctan x$ ;  
(B)  $f(x) = \arcsin x$ .

解 (a)  $f^{(n)}(x) = x^2 a^n e^{ax} + 2nxa^{n-1}e^{ax}$   
 $+ n(n-1)a^{n-2}e^{ax},$

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)a^{n-2};$$

(6) 利用 1218 题的结果, 得

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(0) &= 0 \text{ 及 } f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k (2k)! \\ (k &= 0, 1, 2, \dots); \end{aligned}$$

$$(B) y' = f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y'' = f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

若以添加下标“0”表示在  $x=0$  时的导数值, 则得

$$y'_0 = f'(0) = 1, y''_0 = f''(0) = 0,$$

并且有

$$(1-x^2)y'' - xy' = 0.$$

对上式应用莱布尼兹公式, 得

$$\begin{aligned} (1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} \\ - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} = 0. \end{aligned}$$

在上式中, 令  $x=0$ , 则有

$$y_0^{(n+2)} - n(n-1)y_0^{(n)} - ny_0^{(n)} = 0,$$

令  $x = 0$ , 即得

$$y_0^{(n+2)} + (m^2 - n^2)y_0^{(n)} = 0.$$

由于  $y_0' = 0$ , 故  $y_0^{(2k+1)} = f^{(2k+1)}(0) = 0 (k = 1, 2, \dots)$ ;

又由于  $y_0'' = -m^2$ , 故

$$\begin{aligned} y_0^{(2k)} &= f^{(2k)}(0) = \dots [m^2 - (2k-2)^2]y_0^{(2k-2)} \\ &= \{-[m^2 - (2k-2)^2]\} \\ &\quad \cdot \{-[m^2 - (2k-4)^2]\}y_0^{(2k-4)} \\ &= \dots\dots\dots \\ &= (-1)^{k-1}[m^2 - (2k-2)^2] \\ &\quad [m^2 - (2k-4)^2]\dots(m^2 - 2^2)y_0'' \\ &= (-1)^k m^2 (m^2 - 2^2)\dots[m^2 - (2k-2)^2] \\ &\quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

$$(6) y' = f'(x) = \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \cos(\operatorname{arcsin} x),$$

$$\begin{aligned} y'' = f''(x) &= \frac{m^2}{1-x^2} \sin(\operatorname{arcsin} x) \\ &\quad + \frac{mx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \cos(\operatorname{arcsin} x). \end{aligned}$$

于是,

$$y_0' = f'(0) = m, y_0'' = f''(0) = 0,$$

并且有

$$(1-x^2)y'' - xy' + m^2y = 0.$$

这与本题(a)所得的方程是一样的, 因而也有与(a)同样的结果:

$$y_0^{(n+2)} + (m^2 - n^2)y_0^{(n)} = 0.$$

由于  $y_0'' = 0$ , 故  $y_0^{(2k)} = f^{(2k)}(0) = 0 (k = 1, 2, \dots)$ ;

又由于  $y'_0 = m$ , 故

$$\begin{aligned} y_0^{(2k+1)} &= f^{(2k+1)}(0) \\ &= -[m^2 - (2k-1)^2]y_0^{(2k-1)} = \cdots \\ &= (-1)^k m(m^2 - 1^2) \cdots [m^2 - (2k-1)^2] \\ &\quad (k = 1, 2, \cdots). \end{aligned}$$

1222. (a)  $f(x) = (\arctan x)^2$ ; (b)  $f(x) = (\arcsin x)^2$ .

**解** (a) 仍以下标带“0”者表示在  $x = 0$  时的导数值, 应用莱布尼兹公式及 1220 题(6)的结果, 即得

$$\begin{aligned} f^{(2k-1)}(0) &= (\arctan x \cdot \arctan x)_0^{(2k-1)} \\ &= 0 \quad (k = 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(0) &= (\arctan x \cdot \arctan x)_0^{(2k)} \\ &= \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^i (\arctan x)_0^{(i)} \cdot (\arctan x)_0^{(2k-i)} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^{2i+1} (\arctan x)_0^{(2i+1)} \\ &\quad \cdot (\arctan x)_0^{(2k-2i-1)} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^{2i+1} (-1)^i (2i)! \\ &\quad \cdot (-1)^{k-i-1} (2k-2i-2)! \\ &= (-1)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(2k)!}{(2i+1)!(2k-2i-1)!} \\ &\quad \cdot (2i)!(2k-2i-2)! \\ &= (-1)^{k-1} (2k)! \\ &\quad \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(2i+1)(2k-2i-1)} \\ &= (-1)^{k-1} (2k)! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \left( \frac{1}{2k} \left( \frac{1}{2i+1} + \frac{1}{2k-2i-1} \right) \right) \\
& = (-1)^{k-1} 2(2k-1)! \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2(k-i)-1} \\
& = (-1)^{k-1} (2k-1)! \cdot \\
& \quad 2 \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2k-1} \right) (k=1, 2, \cdots).
\end{aligned}$$

$$(6) f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x \text{ 或}$$

$$\sqrt{1-x^2} f'(x) = 2 \arcsin x,$$

对上式两边再求导, 得

$$\sqrt{1-x^2} f''(x) - \frac{x f'(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$

即

$$(1-x^2) f''(x) - x f'(x) - 2 = 0.$$

应用莱布尼兹公式, 得

$$\begin{aligned}
& (1-x^2) f^{(n+2)}(x) - 2nx f^{(n+1)}(x) \\
& - n(n-1) f^{(n)}(x) - x f^{(n+1)}(x) - n f^{(n)}(x) = 0.
\end{aligned}$$

在上式中令  $x=0$ , 即得

$$f^{(n+2)}(0) - n^2 f^{(n)}(0) = 0.$$

由于  $f'(0) = 0$ , 故

$$f^{2k-1}(0) = 0 \quad (k=1, 2, \cdots);$$

又由于  $f''(0) = 2$ , 故

$$\begin{aligned}
f^{(2k)}(0) &= (2k-2)^2 (2k-4)^2 \cdots 2^2 f''(0) \\
&= 2^{(2k-1)} [(k-1)!]^2 (k=1, 2, \cdots).
\end{aligned}$$



1223. 设

$$f(x) = (x - a)^n \varphi(x),$$

其中函数  $\varphi(x)$  于  $a$  点的邻区内有  $(n - 1)$  阶的连续导函数, 求  $f^{(n)}(a)$ .

解 由莱布尼兹公式, 得

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(x) &= (x - a)^n \varphi^{(n-1)}(x) \\ &\quad + C_{n-1}^1 n(x - a)^{n-1} \varphi^{(n-2)}(x) + \cdots \\ &\quad + C_{n-2}^{n-2} n(n-1) \cdots 3(x - a)^2 \varphi'(x) \\ &\quad + n!(x - a) \varphi(x). \end{aligned}$$

于是,  $f^{(n-1)}(a) = 0$ .

按导数定义, 即得

$$\begin{aligned} f^{(n)}(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} [(x - a)^{n-1} \varphi^{(n-1)}(x) \\ &\quad + C_{n-1}^1 n(x - a)^{n-2} \varphi^{(n-2)}(x) + \cdots \\ &\quad + C_{n-2}^{n-2} n(n-1) \cdots 3(x - a) \varphi'(x) \\ &\quad + n! \varphi(x)] \\ &= n! \varphi(a). \end{aligned}$$

1224. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \frac{1}{x}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0 \end{cases}$$

( $n$  为自然数) 于点  $x = 0$  有一直到  $n$  阶的导函数, 而无  $(n + 1)$  阶导函数.

证 由莱布尼兹公式, 当  $x \neq 0$  时得

$$f^{(n)}(x) = \left( x^{2n} \sin \frac{1}{x} \right)^{(n)}$$

$$= \sum_{i=0}^m C_m^i (x^{2\pi})^{m-i} \left( \sin \frac{1}{x} \right)^{(i)}$$

首先指出, 有

$$\begin{aligned} \left( \sin \frac{1}{x} \right)^{(i)} &= \sum_{k=1}^{i-1} \left[ a_k x^{-(i+k)} \sin \left( \frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2} \right) \right] \\ &\quad + (-x^{-2})^i \sin \left( \frac{1}{x} + \frac{i\pi}{2} \right), \\ &\quad (x \neq 0), \end{aligned}$$

其中  $a_k$  是某些常数. 现用数学归纳法证明之:

当  $i = 1$  时, 命题显然成立;

设当  $i = N$  时, 命题成立, 要证命题对  $i = N + 1$  时也成立. 事实上, 有

$$\begin{aligned} \left( \sin \frac{1}{x} \right)^{(N+1)} &= \sum_{k=1}^{N-1} a_k \left[ x^{-(N+k)} \sin \left( \frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2} \right) \right], \\ &\quad + \left[ (-x^{-2})^N \sin \left( \frac{1}{x} + \frac{N\pi}{2} \right) \right], \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} a_k \left[ -(N+k)x^{-(N+1+k)} \right. \\ &\quad \cdot \sin \left( \frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2} \right) + x^{-(N+k)} \\ &\quad \cdot (-x^{-2}) \sin \left( \frac{1}{x} + \frac{k+1}{2}\pi \right) \Big] \\ &\quad + \left[ N(-x^{-2})^{N-1} \cdot (2x^{-3}) \right. \\ &\quad \cdot \sin \left( \frac{1}{x} + \frac{N\pi}{2} \right) + (-x^{-2})^{N+1} \\ &\quad \cdot \sin \left( \frac{1}{x} + \frac{N+1}{2}\pi \right) \Big] \\ &= \sum_{k=1}^{(N+1)-1} [b_k x^{-(N+1+k)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2}\right) \Big] + (-x^{-2})^{N+1} \\ & \cdot \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{N+1}{2}\pi\right), \end{aligned}$$

其中  $b_k$  是一些适当的常数. 于是, 命题对于一切自然数均成立.

因而, 我们有

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) = & \sum_{i=0}^m C_m^i \cdot \frac{(2n)!}{(2n-m+i)!} x^{2n-m+i} \\ & \cdot \left[ \sum_{k=1}^{i-1} a_k x^{-(i+k)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2}\right) \right. \\ & \left. + (-x^{-2})^i \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{i\pi}{2}\right) \right] (x \neq 0). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) = & (-1)^m x^{2(n-m)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{m\pi}{2}\right) \\ & + O(|x|^{2(n-m)+1}) (x \rightarrow 0) \\ & (m = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (*)$$

由于

$$\begin{aligned} f'(0) = & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \\ = & \lim_{x \rightarrow 0} x^{2n-1} \sin \frac{1}{x} = 0, \end{aligned}$$

故由(\*), 得知

$$\begin{aligned} f''(0) = & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} \\ = & \lim_{x \rightarrow 0} \left[ -x^{2n-3} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}\right) + O(|x|^{2n-2}) \right] \\ = & 0, \end{aligned}$$

一直推下去, 得

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (-1)^{n-1} x \sin \left( \frac{1}{x} + \frac{(n-1)\pi}{2} \right) + O(|x|^2) \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(-1)^n}{x} \sin \left( \frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2} \right) + O(1) \right],
\end{aligned}$$

在  $x = 0$  近旁,  $\frac{(-1)^n}{x} \sin \left( \frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2} \right)$  无界且振荡, 故

$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(-1)^n}{x} \sin \left( \frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2} \right) + O(1) \right]$  不存在, 因而  $f^{(n+1)}(0)$  不存在. 证毕

1225. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0 & \text{若 } x = 0, \end{cases}$$

在  $x = 0$  处是无穷次可微分的. 作出此函数的图形.

证 当  $x \neq 0$  时,  $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$ . 下面我们指出, 对于任何自然数  $n$ , 均有

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_n \left( \frac{1}{x} \right) \quad (x \neq 0),$$

其中  $P_n(t)$  是关于  $t$  的多项式. 现用数学归纳法证明之:

当  $n = 1$  时, 命题显然成立;

设当  $n = k$  时命题成立, 即  $f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_k \left( \frac{1}{x} \right)$ ,

$P_k(t)$  是关于  $t$  的某多项式. 要证命题对于  $n = k + 1$  时也成立. 事实上, 有

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left[ e^{-\frac{1}{x^2}} P_k \left( \frac{1}{x} \right) \right]', \\ &= \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} P_k \left( \frac{1}{x} \right) + e^{-\frac{1}{x^2}} P'_k \left( \frac{1}{x} \right) \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}} \left\{ 2 \left( \frac{1}{x} \right)^3 P_k \left( \frac{1}{x} \right) - \left( \frac{1}{x} \right)^2 P'_k \left( \frac{1}{x} \right) \right\} \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}} P_{k+1} \left( \frac{1}{x} \right), \end{aligned}$$

其中  $P_{k+1}(t)$  是关于  $t$  的另一多项式.

于是, 命题对于一切自然数  $n$  均成立.

现在, 证明函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处是无穷次可微分的. 首先, 注意到

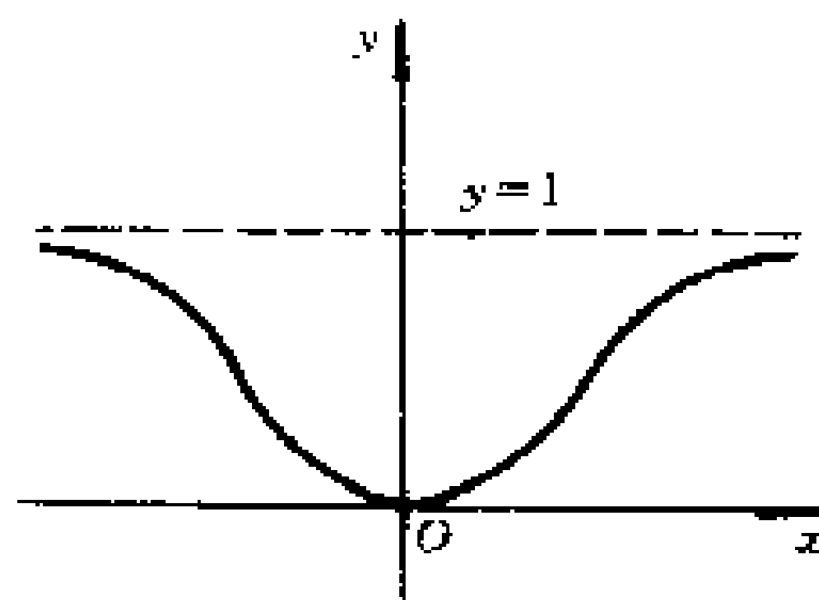


图 2.37

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0,$$

其中最末一式的极限求法可参看 654 题(6). 仍用此法, 设  $f^{(n)}(0) = 0$ , 则可证明  $f^{(n+1)}(0) = 0$ . 事实上, 有

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} P_n \left( \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \right\} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ P_n^* \left( \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \right\} = 0,$$

( $P_n^*(t) = t p_n(t)$  也是  $t$  的多项式).

根据数学归纳法, 可知  $f^{(n)}(0) = 0$  对于一切自然数  $n$  均成立, 即函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处无穷次可微分, 且其各阶导数为零. 图象如图 2.37 所示.

1226. 证明: 契比协夫多项式

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cos(\text{arc cos } x) \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

满足方程式

$$(1 - x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2T_m(x) = 0.$$

证  $T_m'(x) = \frac{m}{2^{m-1} \sqrt{1-x^2}} \sin(\text{arc cos } x)$

$$(|x| < 1),$$

$$\begin{aligned} T_m''(x) &= -\frac{m^2}{2^{m-1}(1-x^2)} \cos(\text{arc cos } x) \\ &\quad + \frac{mx}{2^{m-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \sin(\text{arc cos } x). \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} (1-x^2)T_m''(x) &= -\frac{m^2}{2^{m-1}} \cos(\text{arc cos } x) \\ &\quad + \frac{mx}{2^{m-1} \sqrt{1-x^2}} \sin(\text{arc cos } x) \\ &= -m^2T_m(x) + xT_m'(x), \end{aligned}$$

即

$$(1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2T_m(x) = 0.$$

1227. 证明: 勒襄德多项式

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} [(x^2 - 1)^m]^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned}
& + \cdots + (-1)C_m^{m-1}m!xe^{-x} + m!e^{-x}\} \\
& = (-1)^mx^m + (-1)^{m-1}C_m^1mx^{m-1} \\
& \quad + \cdots + (-1)C_m^{m-1}m!x + m! \\
& = (-1)^m[x^m - m^2x^{m-1} + \cdots \\
& \quad + (-1)^{m-1}m^2(m-1)!x + \\
& \quad (-1)^mm!]
\end{aligned}$$

其次, 设  $y = x^me^{-x}$ , 就有

$$y' = mx^{m-1}e^{-x} - x^me^{-x},$$

于是,

$$xy' + (x-m)y = 0.$$

在上述等式两端各取  $(m+1)$  阶导函数, 按莱布尼兹公式, 即得

$$\begin{aligned}
& xy^{(m+2)} + (m+1)y^{(m+1)} + (x-m)y^{(m+1)} \\
& + (m+1)y^{(m)} = 0
\end{aligned}$$

或

$$xy^{(m+2)} + (1+x)y^{(m+1)} + (m+1)y^{(m)} = 0.$$

再设  $z = y^{(m)}$ , 则由上式可得

$$xz'' + (1+x)z' + (m+1)z = 0. \quad (1)$$

由于  $L_m(x) = e^x \cdot z$ , 故

$$L'_m(x) = e^x(z + z'), L''_m(x) = e^x(z + 2z' + z''),$$

于是

$$\begin{aligned}
& xL''_m(x) + (1-x)L'_m(x) + mL_m(x) \\
& = e^x\{x(z + 2z' + z'') + (1+x)(z + z') + mz\} \\
& = e^x\{xz'' + (x+1)z' + (m+1)z\}.
\end{aligned} \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式, 即证得

$$xL''_m(x) + (1-x)L'_m(x) + mL_m(x) = 0.$$

1229. 设  $y = f(u)$  及  $u = \varphi(x)$ , 其中  $f(u)$  及  $\varphi(x)$  为可微分  $n$  次的函数.

$$\text{证明: } \frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^n A_k(x) f^{(k)}(u),$$

其中系数  $A_k(x) (k = 0, 1, \dots, n)$  与函数  $f(u)$  无关.

证 由于

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \varphi'(x),$$

故命题当  $n = 1$  时成立;

设当  $n = m$  时命题成立, 即有

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{k=1}^m A_k(x) f^{(k)}(u),$$

要证命题对于  $n = m + 1$  时也成立. 事实上, 有

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} &= \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^m A_k(x) f^{(k)}(u) \\ &= \sum_{k=1}^m \{ A'_k(x) f^{(k)}(u) \\ &\quad + A_k(x) f^{(k+1)}(u) \varphi'(x) \} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} B_k(x) f^{(k)}(u), \end{aligned}$$

其中,  $B_1(x) = A'_1(x)$ ,  $B_k(x) = \varphi'(x) A_{k-1}(x) + A'_k(x) (k = 2, 3, \dots, m)$ ,  $B_{m+1}(x) = A_m(x) \varphi'(x)$ , 它们均与  $f(u)$  无关.

于是, 按数学归纳法得知

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^n A_k(x) f^{(k)}(u)$$

对于一切自然数  $n$  均成立.

1230. 证明: 对于复合函数  $y = f(x^2)$  的  $n$  阶导函数, 下面的公



式正确

$$\begin{aligned}\frac{d^n y}{dx^n} &= (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) \\ &+ \dots\end{aligned}$$

证 当  $n = 1$  时公式成立, 事实上,

$$\frac{dy}{dx} = 2xf(x^2).$$

设当  $n = m$  时公式成立, 要证公式对于  $n = m + 1$  时也成立. 事实上, 有

$$\begin{aligned}\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d^m y}{dx^m} \right) \\ &= 2m(2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) + (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2) \\ &+ \frac{m(m-1)}{1!} 2(m-2)(2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) \\ &+ \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \\ &\quad \cdot 2(m-4)(2x)^{m-5} f^{(m-2)}(x^2) \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \\ &\quad \cdot (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \dots \\ &= (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2) \\ &+ \left[ 2m + \frac{m(m-1)}{1!} \right] (2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) \\ &+ \left[ \frac{2m(m-1)(m-2)}{1!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \cdots \\
& - (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2) \\
& + \frac{(m+1)m}{1!} (2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) \\
& + \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{2!} \\
& \cdot (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \cdots
\end{aligned}$$

这正是公式对于  $n = m + 1$  时的情形. 于是, 按数学归纳法得知, 公式对于一切自然数  $n$  均成立.

1231. 契比协夫-厄耳米特多项式定义如下:

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} (e^{-x^2})^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

求多项式  $H_m(x)$  的明显的表达式.

证明:  $H_m(x)$  满足方程

$$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

解 设  $y = e^{-x^2}$ , 则有

$$y' = (-2x)e^{-x^2} = (-1)^1(2x)^1 e^{-x^2}.$$

$$\begin{aligned}
y'' &= e^{-x^2} [(-2x)^2 - 2] \\
&= [(-1)^2(2x)^2 - 2] e^{-x^2},
\end{aligned}$$

一般地, 可用数学归纳法证明

$$\begin{aligned}
y^{(m)} &= \left[ (-1)^m (2x)^m + (-1)^{m-1} \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-2} \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{m-2} \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \right. \\
&\quad \left. \cdot (2x)^{m-4} + \cdots \right] e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

于是, 得

$$\begin{aligned}
H_m(x) &= (-1)^m e^{x^2} y^{(m)} \\
&= (2x)^m + \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-2}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} (2x)^{m-4} - \dots$$

又  $y' + 2xy = 0$ .

对上式两端各取  $(m+1)$  阶导函数, 按莱布尼兹公式, 即得

$$y^{(m+2)} + 2xy^{(m+1)} + 2(m+1)y^{(m)} = 0.$$

再设  $z = y^{(m)}$ , 上式就是

$$z'' + 2xz' + 2(m+1)z = 0. \quad (1)$$

由  $H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} z$ , 得

$$H'_m(x) = (-1)^m e^{x^2} (2xz + z'),$$

$$H''_m(x) = (-1)^m e^{x^2} [(4x^2 + 2)z + 4xz' + z''],$$

从而有

$$\begin{aligned} H''_m(x) - 2xH'_m(x) + 2mH_m(x) \\ &= (-1)^m e^{x^2} \{ (4x^2 + 2)z + 4xz' + z'' - 4x^2z \\ &\quad - 2xz' + 2mz \} \\ &= (-1)^m e^{x^2} \{ z'' + 2xz' + 2(m+1)z \}. \end{aligned} \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式, 即证得

$$H''_m(x) - 2xH'_m(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

1232. 证明等式

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}.$$

证 当  $n=1$  时, 由于  $(e^{\frac{1}{x}})' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ , 故等式成立.

设当  $n=k$  时等式成立, 即有

$$(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)} = \frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}},$$

要证等式对  $n=k+1$  时也成立. 事实上, 有

$$(x^k e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)} = [(x \cdot x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k)}]'$$

$$\begin{aligned}
&= [x(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)} + k(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)}]' \\
&= x(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)} + (x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)} \\
&\quad + k(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)} \\
&= x\left[\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}\right]' + (k+1) \cdot \frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} \\
&\quad + \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^k(k+1)}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

于是,按数学归纳法得知

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

对于一切自然数  $n$  均成立.

1233. 设  $\frac{d}{dx} = D$  表示微分算子及

$$f(D) = \sum_{k=0}^n p_k(x) D^k$$

为微分符号的多项式,其中  $p_k(x)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) 为  $x$  的某连续函数.

证明:

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x}f(D + \lambda)u(x),$$

其中  $\lambda$  为常数.

证 按莱布尼兹公式,有

$$\begin{aligned}
D^k\{e^{\lambda x}u(x)\} &= [e^{\lambda x}u(x)]^{(k)} \\
&= \sum_{i=0}^k C_k^i (e^{\lambda x})^{(i)} u^{(k-i)}(x)
\end{aligned}$$

$$= e^{\lambda x} \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda^i u^{(k-i)}(x).$$

另一方面,有

$$\begin{aligned} (D + \lambda)^k u(x) &= \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda^i D^{(k-i)} u(x) \\ &= \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda^i u^{(k-i)}(x). \end{aligned}$$

因而,得

$$D^k \{e^{\lambda x} u(x)\} = e^{\lambda x} (D + \lambda)^k u(x).$$

于是,

$$\begin{aligned} f(D) \{e^{\lambda x} u(x)\} &= \sum_{k=0}^n p_k(x) D^k \{e^{\lambda x} u(x)\} \\ &= e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n p_k(x) \cdot (D + \lambda)^k u(x) \\ &= e^{\lambda x} (D + \lambda) u(x), \end{aligned}$$

即

$$f(D) \{e^{\lambda x} u(x)\} = e^{\lambda x} f(D + \lambda) u(x).$$

1234. 证明:若干方程

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0$$

中,令

$$x = e^t,$$

其中  $t$  为自变数,则此方程具有下形

$$\sum_{k=0}^n a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y = 0,$$

其中  $D = \frac{d}{dt}$ .

证 记  $\delta = \frac{d}{dx}$ , 则有

$$Dy = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = e^t \delta y \text{ 或 } \delta y = e^{-t} Dy.$$

从而对于符号  $D$  及  $\delta$  有关系

$$\delta = e^{-t} D.$$

继续求得

$$\begin{aligned} \delta^2 y &= e^{-t} D[e^{-t} Dy] = e^{-t} [-e^{-t} Dy + e^{-t} D^2 y] \\ &= e^{-2t} D(D-1)y, \end{aligned}$$

一般地,可用数学归纳法证得

$$\delta^{(k)} y = e^{-kt} D(D-1)\cdots(D-k+1)y. \quad (1)$$

事实上,设公式(1)对  $k=m$  时成立,则有

$$\begin{aligned} \delta^{(m+1)} y &= \delta(\delta^{(m)} y) \\ &= e^{-t} D[e^{-mt} D(D-1)\cdots(D-m+1)y] \\ &= e^{-t} [-me^{-mt} D(D-1)\cdots(D-m+1)y \\ &\quad + e^{-mt} D^2(D-1)\cdots(D-m+1)y] \\ &= e^{-(m+1)t} D(D-1)\cdots[D \\ &\quad - (m+1)+1]y, \end{aligned}$$

即公式(1)对  $k=m+1$  时也成立. 于是,公式(1)对于一切自然数均成立.

于是,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} &= \sum_{k=0}^n a_k x^k \delta^{(k)} y \\ &= \sum_{k=0}^n a_k e^{kt} \cdot e^{-kt} D(D-1)\cdots(D \\ &\quad - k+1)y = 0, \end{aligned}$$

即

$$\sum_{k=0}^n a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y = 0.$$

## § 6. 洛尔、拉格朗日及哥西定理

1° 洛尔定理 若函数  $f(x)$ : (1) 在闭区间  $[a, b]$  上有定义并且是连续的; (2) 在此区间内有有限的导函数  $f'(x)$ ; (3)  $f(a) = f(b)$ , 则至少存在有一个数  $c$  于区间  $(a, b)$  内, 使

$$f'(c) = 0, \text{ 其中 } a < c < b.$$

2° 拉格朗日定理 若函数  $f(x)$ : (1) 在闭区间  $[a, b]$  上有定义并且是连续的; (2) 在区间  $(a, b)$  内有有限的导函数, 则

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c), \text{ 其中 } a < c < b$$

(有限增量公式).

3° 哥西定理 若函数  $f(x)$  及  $g(x)$ : (1) 在闭区间  $[a, b]$  上有定义并且是连续的; (2) 于  $(a, b)$  内  $f(x)$  及  $g(x)$  有有限的导函数  $f'(x)$  及  $g'(x)$ ; (3) 当  $a < x < b$ ,  $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$ ; (4)  $g(a) \neq g(b)$ , 则

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

其中  $a < c < b$ .

### 1235. 检验洛尔定理对于函数

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

的正确性.

**解** (1) 函数  $f(x)$  在  $[1, 2]$  及  $[2, 3]$  上连续;

(2)  $f'(x)$  在  $(1, 2)$  及  $(2, 3)$  上处处存在;

(3)  $f(1) = f(2) = 0$  及  $f(2) = f(3) = 0$ .

由洛尔定理, 应该有  $1 < c_1 < 2$ ,  $2 < c_2 < 3$  存在, 使  $f'(c_1) = 0$ ,  $f'(c_2) = 0$ . 下面, 我们验证确有这种  $c_1, c_2$  存在. 易知

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - 2)(x - 3) + (x - 1)(x - 3) \\ &\quad + (x - 1)(x - 2) \end{aligned}$$

$= F(b)$ . 故由洛尔定理可知, 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $c$ , 使

$$F'(c) = 0.$$

而在  $(a, b)$  内,  $F'(x) = f'(x)$ , 所以

$$f'(c) = 0.$$

下设  $(a, b)$  为无穷区间. 若  $a = -\infty, b = +\infty$ , 可设

$$x = \operatorname{tg} t \left( -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right),$$

则对由函数  $f(x)$  与  $x = \operatorname{tg} t$  组成的复合函数

$$g(t) = f(\operatorname{tg} t)$$

在有穷区间  $\left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$  内仿前讨论可知: 至少存在一

点  $t_0 \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ , 使

$$g'(t_0) = f'(c) \cdot \sec^2 t_0 = 0,$$

其中  $c = \operatorname{tg} t_0$ . 由于  $\sec^2 t_0 \neq 0$ , 故

$$f'(c) = 0.$$

若  $a$  为有限数,  $b = +\infty$ . 则可取  $b_0 > \max \{a, 0\}$ , 而令

$$x = \frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t}.$$

于是, 对复合函数  $g(t) = f\left(\frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t}\right)$  在有穷区间  $(a, b_0)$  上仿前讨论, 可知: 存在  $t_0 \in (a, b_0)$  使

$$g'(t_0) = f'(c) \cdot \frac{b_0(b_0 - a)}{(b_0 - t_0)^2} = 0,$$

其中  $c = \frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t_0}$ . 显然  $a < c < +\infty$  由于



$$\frac{b_0(b_0 - a)}{(b_0 - t_0)^2} > 0,$$

故  $f'(c) = 0$ .

对于  $a = -\infty, b$  为有限数的情形, 可类似地进行讨论. 证毕.

1238. 设函数  $f(x)$ : (1) 于闭区间  $[x_0, x_n]$  上有定义且有  $(n-1)$  阶的连续导函数  $f^{(n-1)}(x)$ ; (2) 于区间  $(x_0, x_n)$  内有  $n$  阶导函数  $f^{(n)}(x)$ ; (3) 有下面的等式成立

$$f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) \quad (x_0 < x_1 < \cdots < x_n).$$

证明: 在区间  $(x_0, x_n)$  内最少有一点  $\xi$ , 使

$$f^{(n)}(\xi) = 0.$$

证 在每一个闭区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{k-1}, x_k], \\ \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

上, 函数  $f(x)$  满足洛尔定理的条件. 因此, 存在  $n$  个点

$$x'_1, x'_2, \cdots, x'_k, \cdots, x'_n,$$

其中  $x'_k \in (x_{k-1}, x_k) (k = 1, 2, \cdots, n)$ , 使

$$f'(x'_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

于是, 在每个区间  $[x'_k, x'_{k+1}] (k = 1, 2, \cdots, n-1)$  上, 函数  $f'(x)$  满足洛尔定理的条件. 因此存在点  $x''_k$  属于  $[x'_k, x'_{k+1}] (k = 1, 2, \cdots, n-1)$ , 使

$$f''(x''_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1).$$

继续上述步骤, 经  $(n-1)$  次后, 得出一个区间  $[x''_{n-1}, x''_n] \subset (x_0, x_n)$ , 满足  $f^{(n-1)}(x''_k) = 0 (k = 1, 2)$ .

于是在此区间上, 函数  $f^{(n-1)}(x)$  满足洛尔定理的条件.

所以,至少存在一点  $\xi(x_1^{n-1}, x_2^{n-1})$ , 使

$$f^{(n)}(\xi) = 0.$$

1239. 设函数  $f(x)$ : (1) 于闭区间  $[a, b]$  上有定义且有  $(p + q)$  阶的连续导函数  $f^{(p+q)}(x)$ ; (2) 在区间  $(a, b)$  内有  $(p + q + 1)$  阶的导函数  $f^{(p+q+1)}(x)$ ; (3) 有下面的等式成立:

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(p)}(a) = 0$$

$$\text{及 } f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(q)}(b) = 0$$

证明: 在此种情形下

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0,$$

其中  $c$  为区间  $(a, b)$  内的某点.

证 若  $p = q$ .

在  $[a, b]$  上  $f(x)$  满足洛尔定理的条件, 因此, 至少存在一点  $x_1^{(1)} \in (a, b)$ , 使  $f'(x_1^{(1)}) = 0$ ;

对于区间  $[a, x_1^{(1)}]$  及  $[x_1^{(1)}, b]$ , 函数  $f'(x)$  在其上满足洛尔定理的条件, 因此, 至少分别存在  $x_2^{(1)}, x_2^{(2)}$ , 使  $f''(x_2^{(1)}) = 0, f''(x_2^{(2)}) = 0$ ;

.....

继续上述步骤, 经过  $p$  次后, 得出  $(p + 2)$  个点:

$$a, x_p^{(1)}, x_p^{(2)}, x_p^{(3)}, \cdots, x_p^{(p)}, b$$

使  $f^{(p)}(a) = f^{(p)}(x_p^{(k)}) = f^{(p)}(b) = 0 \ (k = 1, 2, \cdots, p)$ ;

由此  $(p + 2)$  个点组成  $(p + 1)$  个区间, 仿 1238 题对于它们重复使用洛尔定理  $p$  次, 即可得出点  $c$  属于  $(a, b)$ , 使

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0.$$

若  $p \neq q$ , 不失一般性, 设  $q = p + k$  ( $k$  为某正整

数).

当进行  $(p+1)$  次后, 对于函数  $f^{(p)}(x) = 0$  而言, 在  $(a, b)$  内有  $(p+1)$  个点:

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p+1},$$

满足  $f^{(p+1)}(\xi_k) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, p+1$ );

再加上条件  $f^{(p+1)}(b) = f^{(p+2)}(b) = \dots = f^{(p+k)}(b) = 0$ , 重复对此再应用洛尔定理  $k$  次, 则在  $(a, b)$  内仍然存在  $(p+1)$  个点:

$$\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \dots, \xi_{p+1}^{(k)},$$

使

$$f^{(p+k+1)}(\xi_j^{(k)}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p+1).$$

以后, 每进行一次, 减少一个点, 进行  $p$  次后, 即可得出一点  $c \in (a, b)$ , 使

$$f^{(p-k+q+1)}(c) = 0,$$

即

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0.$$

证毕.

1240. 证明: 若具实系数  $a_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) 的多项式

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

之一切根为实数, 则其逐次的导函数  $P'_n(x), P''_n(x), \dots, P_n^{(n-1)}(x)$  也仅有实根.

证 根据假设, 此处  $n$  次多项式  $P_n(x)$  有  $n$  个实根. 记其诸实根为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ , 并且  $\alpha_i$  是  $k_i$  重根,  $k_i \geq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ), 有  $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$ .

于是可改写  $P_n(x)$  为

$$P_n(x) = a_0 (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_l)^{k_l}.$$

显见  $\alpha_i$  为  $P'_n(x)$  的  $k_i - 1$  重根 ( $i = 1, 2, \dots, l$ ).

由  $P_n(\alpha_1) = P_n(\alpha_2) = \dots = P_n(\alpha_l) = 0$ ,  $P_n(x)$  可微, 据洛尔定理, 存在  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{l-1}$ , 而  $\xi_i \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$ , 使  $P'_n(\xi_i) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, l-1$ ), 于是有

$P'_n(x)$ 的根	$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{l-1}$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\dots$	$\alpha_l$
重数	单根	$k_1 - 1$	$k_2 - 1$	$\dots$	$k_l - 1$

即  $n-1$  次多项式  $P'_n(x)$  的根恰有  $(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \dots + (k_l - 1) + (l - 1) = k_1 + k_2 + \dots + k_l - 1 = n - 1$  个, 这就是说, 一个  $n$  次多项式, 若  $n$  个根均为实根的话, 则其导函数  $n-1$  次多项式的  $n-1$  个根也必全为实根. 反复运用这一结果, 由  $P'_n(x)$  的  $n-1$  个根皆为实根, 便可推知  $P''_n(x)$  的  $n-2$  个根也均为实根. 如此下去, 即知关于  $P_n(x)$  的一切低阶导函数——直至  $P^{(n-1)}(x)$  也仅有实根.

#### 1241. 证明: 勒襄德多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}$$

的一切根都是实数且包含于区间  $(-1, 1)$  中.

**证** 显然,  $2n$  次多项式  $Q_{2n}(x) = (x^2 - 1)^n = (x+1)^n \cdot (x-1)^n$  仅有实根 ( $-1$  是  $n$  重根,  $1$  也是  $n$  重根). 因此, 根据 1240 题的结果知  $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} Q_{2n}(x)$  仅有实根, 且都含于  $[-1, 1]$  中. 但显然  $-1$  和  $1$  都不是  $P_n(x)$  的根 (因为, 例如,  $-1$  是  $Q_{2n}(x)$  的  $n$  重根, 故

$-1$  是  $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}Q_{2n}(x)$  的单根, 因而  $-1$  不是  $\frac{d^n}{dx^n}Q_{2n}(x)$  的根). 因此,  $P_n(x)$  的根全部位于  $(-1, 1)$  中. 证毕.

1242. 证明: 契比协夫——拉格耳多项式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

所有的根都是正数.

证 令  $Q(x) = x^n e^{-x}$ , 则易知

$$\begin{aligned} Q^{(m)}(x) = e^{-x} [ & (-1)^m x^n + (-1)^{m-1} C_m^1 n x^{n-1} \\ & + \cdots + (-1) C_m^{m-1} n(n-1)\cdots(n-m \\ & + 2)x^{n-m+1} + n(n-1)\cdots(n-m \\ & + 1)x^{n-m} ] (m = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned}$$

显然  $Q^{(m)}(0) = 0$  ( $m = 0, 1, \cdots, n-1$ ; 为方便计, 以下记  $Q^{(0)}(x) = Q(x)$ , 但  $Q^{(n)}(0) = n! \neq 0$ ). 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Q^{(m)}(x) = 0 \quad (m = 0, 1, \cdots, n).$$

对函数  $Q(x)$  和区间  $(0, +\infty)$  应用 1237 题, 知存在  $\xi^{(1)} \in (0, +\infty)$  使  $Q'(\xi^{(1)}) = 0$ . 再对函数  $Q'(x)$  和区间  $(0, \xi^{(1)})$  及  $(\xi^{(1)}, +\infty)$  应用 1237 题, 知存在  $\xi_1^{(2)} \in (0, \xi^{(1)})$ ,  $\xi_2^{(2)} \in (\xi^{(1)}, +\infty)$  使

$$Q''(\xi_i^{(2)}) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

这样继续下去, 反复应用 1237 题  $n$  次, 知存在  $0 < \xi_1^{(n)} < \xi_2^{(n)} < \cdots < \xi_n^{(n)} < +\infty$  使

$$Q^{(n)}(\xi_i^{(n)}) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

显然  $L_n(\xi_i^{(n)}) = 0$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ), 故  $\xi_i^{(n)}$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ) 都是  $L_n(x)$  的根. 但由于

$$L_n(x) = e^x Q^{(n)}(x)$$

$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} C_n^1 n x^{n-1} + \cdots \\ + (-1) C_n^{n-1} n! x + n!$$

是  $x$  的  $n$  次多项式, 故  $L_n(x)$  恰有  $n$  个根 (实的或复的), 因此  $\xi_i^{(n)} (i = 1, 2, \cdots, n)$  是  $L_n(x)$  的全部根. 证毕.

1243. 证明: 契比协夫 —— 厄耳米特多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

所有的根都是实数.

证 设  $Q(x) = e^{-x^2}$ . 显然有

$$Q'(x) = -2xe^{-x^2},$$

$$Q''(x) = 2e^{-x^2}(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1),$$

从而得知  $Q'(x) = 0$  有一个实根,  $Q''(x) = 0$  有两个相异的实根.

设  $Q^{(k)}(x) = 0$  有  $k$  个相异实根, 并记成

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k,$$

注意到  $Q^{(k)}(x)$  是  $e^{-x^2}$  与一个  $k$  次多项式的乘积, 从而就有

$$Q^{(k)}(x) = Ae^{-x^2}(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_k),$$

其中  $A \neq 0$  为某个常数. 下面我们将证  $Q^{(k+1)}(x) = 0$  有  $k+1$  个相异实根. 事实上, 由

$$Q^{(k)}(\alpha_i) = Q^{(k)}(\alpha_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \cdots, k-1)$$

应用洛尔定理得知, 存在  $\beta_i \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$ , 使

$$Q^{(k+1)}(\beta_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k-1).$$

又由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} Q^{(k)}(x) = 0 \text{ 及 } Q^{(k)}(\alpha_1) = 0,$$

利用 1237 题的结果, 故知存在  $\beta_0 \in (-\infty, \alpha_1)$ , 使

$$Q^{(k+1)}(\beta_0) = 0.$$

同法可知, 存在  $\beta_k \in (\alpha_k, +\infty)$ , 使

$$Q^{(k+1)}(\beta_k) = 0.$$

于是,  $Q^{(k+1)}(x) = 0$  有  $k+1$  个实根. 故由数学归纳法, 知  $Q^{(n)}(x) = 0$  有  $n$  个相异实根 ( $n = 1, 2, \dots$ ). 从而  $H_n(x)$  有  $n$  个相异实根. 但是由于  $H_n(x)$  是  $x$  的一个  $n$  次多项式, 故  $H_n(x)$  恰有  $n$  个根 (实的或复的). 因此  $H_n(x)$  所有的根都是实数. 证毕.

1244. 在曲线  $y = x^3$  上某点的切线, 平行于连接点  $A(-1, -1)$  及点  $B(2, 8)$  所成的弦, 求出此点.

**解** 由题设知  $y = x^3$  在所求点  $(x_0, y_0)$  的切线斜率应

为  $y'(x_0) = 3x_0^2 = \frac{8 - (-1)}{2 - (-1)} = 3$ . 于是,

$$x_0 = -1, \text{ 或 } x_0 = 1,$$

故所求的点为  $A(-1, -1)$  及  $C(1, 1)$ .

1245. 若  $ab < 0$ , 有限增量的公式对于函数

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在闭区间  $[a, b]$  上是否正确?

**解** 不正确. 事实上, 如果有限增量公式在此成立, 则有

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \xi \in (a, b),$$

即

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{\xi^2}(b - a) = \frac{a - b}{\xi^2}.$$

但是

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}.$$

所以

$$\frac{a-b}{\xi^2} = \frac{a-b}{ab},$$

即有  $\xi^2 = ab < 0$ , 这样产生矛盾. 因此, 有限增量公式对于函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  在  $[a, b]$  ( $ab < 0$ ) 上不正确. 原因是  $f'(x)$  在  $x = 0$  处不存在, 故有限增量公式的条件不满足.

1246. 设

$$(a) f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0); \quad (b) f(x) = x^3;$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{x}; \quad (d) f(x) = e^x.$$

求满足

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x) \quad (0 < \theta < 1)$$

的函数  $\theta = \theta(x, \Delta x)$ .

解 (a)  $f'(x) = 2ax + b$ .

于是, 有

$$\begin{aligned} & a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - ax^2 - bx - c \\ &= \Delta x [2a(x + \theta \Delta x) + b]. \end{aligned}$$

化简之, 得  $\theta = \frac{1}{2}$ .

$$(b) f'(x) = 3x^2.$$

于是, 有

$$(x + \Delta x)^3 - x^3 = 3\Delta x(x + \theta \Delta x)^2.$$

如果  $x = 0$ , 则  $\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ;

如果  $x \neq 0$ , 化简整理得



$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

其中  $\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2},$

并且  $\lim_{x \rightarrow +0} \theta(x) = \frac{1}{4}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}.$

证 当  $x \geq 0$  时, 对函数  $\sqrt{x}$  施用有限增量公式, 即得

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

解之, 得

$$\theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}[\sqrt{x(x+1)} - x].$$

当  $x = 0$  时  $\theta = \frac{1}{4}$ . 当  $x > 0$  时, 有

$$\begin{aligned} 0 \leq \sqrt{x(x+1)} - x &= \frac{x}{\sqrt{x(x+1)} + x} < \frac{x}{2x} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

于是

$$\frac{1}{4} \leq \theta(x) < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

且有

$$\lim_{x \rightarrow +0} \theta(x) = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{x}{2[\sqrt{x(x+1)} + x]} \right\} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1248.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x} & \text{当 } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

在闭区间  $[0, 2]$  上对于函数  $f(x)$  求有限增量公式中的中间值  $c$ .

解  $f(0) = \frac{3}{2}, f(2) = \frac{1}{2},$

$$f'(x) = \begin{cases} -x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{当 } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

按题设有

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -c(2-0) \text{ 或 } \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{c^2}(2-0),$$

所以  $c = \frac{1}{2}$  或  $c = \sqrt{2}$  ( $-\sqrt{2}$  不适合), 此即所求的中间值  $c$ .

1249. 设:

$$f(x) - f(0) = xf'[\xi(x)],$$

其中  $0 < \xi(x) < x$ .

证明: 若

$$f(x) = x \sin(\ln x) \quad (x > 0)$$

及

$$f(0) = 0$$

则函数  $\xi = \xi(x)$  于任意小的区间  $(0, \epsilon)$  内 (于此  $\epsilon > 0$ ) 是不连续的.

证 用反证法. 假定  $\xi(x)$  在某区间  $(0, \epsilon)$  内连续 ( $\epsilon > 0$ ).

由于当  $x > 0$  时,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin(\ln x) + \cos(\ln x) \\ &= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right), \end{aligned}$$

故由  $f(x) - f(0) = xf'[\xi(x)]$  得

$$x \sin(\ln x) = x \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \xi(x)\right),$$

从而

$$\sin(\ln x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \xi(x)\right), 0 < x < +\infty,$$

现取一个充分大的正整数  $N$ , 使

$$-2N\pi + \frac{\pi}{4} < \ln \xi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

由  $0 < \xi(x) < x$  知  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \xi(x) = 0$ , 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \ln \xi(x) = -\infty,$$

因此, 可取  $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ , 使

$$\ln \xi(\delta) < -2N\pi + \frac{\pi}{4}.$$

由于  $\ln \xi(x)$  在  $\left[\delta, \frac{\varepsilon}{2}\right]$  上连续, 根据中间值定理, 必有

$x_0 \in \left[\delta, \frac{\varepsilon}{2}\right]$  存在, 使

$$\ln \xi(x_0) = -2N\pi + \frac{\pi}{4}.$$

于是

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sin(\ln x_0) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \xi(x_0)\right) \\ &= \sqrt{2}, \end{aligned}$$

这是不可能的. 证毕.

1250. 设函数  $f(x)$  于区间  $(a, b)$  内有连续的导函数  $f'(x)$ . 对于区间  $(a, b)$  内任何一点  $\xi$  可否从此区间中指出另外的两点  $x_1$  及  $x_2$  使满足于

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (x_1 < \xi < x_2)?$$

解 一般地说, 不可以. 例如, 研究函数

$$f(x) = x^3 \quad (-1 < x < 1),$$

它对于  $\xi = 0$  就找不到所需的  $x_1$  和  $x_2$ , 使

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

事实上,  $f'(\xi) = 3\xi^2 = 0$ , 而当  $x_1 < 0 < x_2$  时,

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} \\ &= x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 \\ &= x_2^2 + x_1^2 - |x_1| \cdot |x_2| \\ &> x_2^2 + x_1^2 - 2|x_1||x_2| \\ &= (|x_1| - |x_2|)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

1251. 证明下列不等式:

(a)  $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$ ;

(б) 若  $0 < y < x$  及  $p > 1$ ,  $py^{p-1}(x-y) < x^p - y^p < px^{p-1}(x-y)$ ;

(в)  $|\arctg a - \arctg b| \leqslant |a - b|$ ;

(г)  $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ , 设  $0 < b < a$ .

证 (a)  $|\sin x - \sin y| = |(x-y)\cos \xi| \leqslant |x-y|$  ( $\xi$  在  $x, y$  之间).

(б)  $x^p - y^p = p(x-y)\xi^{p-1}$ , 其中  $0 < y < \xi < x$ .

由于  $p > 1$ , 所以

$$y^{p-1} < \xi^{p-1} < x^{p-1},$$

于是

$$py^{p-1}(x-y) < x^p - y^p < px^{p-1}(x-y);$$

\* ) 原题的不等式中的等号可以去掉.

$$(n) |\arctg a - \arctg b| = \left| \frac{a-b}{1+\xi^2} \right| \leq |a-b|;$$

$$(r) \ln a - \ln b = \frac{a-b}{\xi}, \text{ 其中 } 0 < b < \xi < a.$$

于是,

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

1252. 说明在闭区间  $[-1, 1]$  上哥西定理对于函数  $f(x) = x^2$  及  $g(x) = x^3$  何以不真?

**解**  $f(x)$  及  $g(x)$  在  $[-1, 1]$  上虽有连续的导函数, 且  $g(-1) \neq g(1)$ , 但是, 当  $x = 0$  时,

$$[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2 = 4x^2 + 9x^4 = 0,$$

因此, 对于函数  $f(x)$  及  $g(x)$  不满足哥西定理的条件, 所以结论可以不真. 事实上

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = 0,$$

而

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{2\xi}{3\xi^2} \neq 0 \quad \xi \in (-1, 1), \xi \neq 0,$$

它们是不相等的.

1253. 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[x_1, x_2]$  上可微分, 并且  $x_1, x_2 > 0$ . 证明

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{array} \right| = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

其中  $x_1 < \xi < x_2$ .

证 设  $g(x) = \frac{1}{x}$ ,  $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ , 由于  $x_1 x_2 > 0$ , 故  $x = 0$  在  $[x_1, x_2]$  之外. 从而  $g(x)$  和  $F(x)$  均在  $[x_1, x_2]$  上可微, 且有

$$\begin{aligned} & [g'(x)]^2 + [F'(x)]^2 \\ &= \frac{1}{x^4} \{1 + [xf'(x) - f(x)]^2\} \neq 0 \end{aligned}$$

及

$$g(x_1) \neq g(x_2).$$

因此, 对于函数  $F(x)$  和  $g(x)$  满足哥西定理的条件. 故在  $(x_1, x_2)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使有

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} = \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)},$$

即

$$\frac{\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} = \frac{\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}},$$

化简整理, 即得

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{array} \right| = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

1254. 证明 若函数  $f(x)$  于有穷的区间  $(a, b)$  内可微分, 但无界, 则其导函数  $f'(x)$  于区间  $(a, b)$  内也无界. 逆定理不真; 举出例子.

证 在开区间  $(a, b)$  内, 由于导函数存在, 因此,  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续.

现在假定  $|f'(x)| < N$  ( $a < x < b$ ), 即  $f'(x)$  是

有界的. 取定  $c \in (a, b)$ . 则按有限增量公式可知, 对任何  $a < x < b$ , 均有

$$|f(x) - f(c)| = |x - c| |f'(\xi)| < N(b - a),$$

其中  $\xi$  在  $c$  与  $x$  之间, 从而属于  $(a, b)$ .

因为,

$$|f(x) - f(c)| \geq |f(x)| - |f(c)|,$$

所以

$$|f(x)| < |f(c)| + N(b - a).$$

此与  $f(x)$  是无界的条件相矛盾, 所以  $f'(x)$  是无界的.

反之不一定正确. 例如, 函数

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

在  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  内有界, 但其导函数却是无界的.

注意, 在无限区间内无界的函数的导函数可能有界. 例如, 函数

$$f(x) = \ln x$$

在  $(1, +\infty)$  内无界, 但其导函数  $f'(x) = \frac{1}{x}$  在  $(1, +\infty)$  内却是有界的.

1255. 证明: 若函数  $f(x)$  于有穷或无穷区间  $(a, b)$  内有有界的导函数  $f'(x)$ , 则  $f(x)$  于  $(a, b)$  中一致连续.

证 设当  $x \in (a, b)$  时,  $|f'(x)| \leq M$ . 对于任给的  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ , 则当  $x_1, x_2 \in (a, b)$  且  $|x_1 - x_2| < \delta$  时, 就有

$$\begin{aligned} & |f(x_1) - f(x_2)| \\ &= |x_1 - x_2| \cdot |f'(\xi)| \leq M|x_1 - x_2| < \varepsilon, \end{aligned}$$

( $\xi$  在  $x_1$  与  $x_2$  之间),

于是,  $f(x)$  在  $(a, b)$  内一致连续.

1256. 证明: 若函数  $f(x)$  于无穷的区间  $(x_0, +\infty)$  内可微分, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

即: 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x) = o(x)$ .

证 由于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ , 故对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $X_1 > 0$ , 使当  $x > X_1$  时, 恒有

$$|f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

今在  $(X_1, +\infty)$  内任取一点  $a$ , 则当  $x > a$  时, 由有限增量公式可得

$$|f(x) - f(a)| = |x - a| \cdot |f'(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2} |x - a|.$$

由于

$$|f(x)| - |f(a)| \leq |f(x) - f(a)|,$$

所以

$$|f(x)| \leq |f(a)| + \frac{\varepsilon}{2} |x - a|.$$

再取  $X_2 > a$ , 使  $\frac{|f(a)|}{X_2} < \frac{\varepsilon}{2}$ , 则当  $x > X_2$  时, 恒有

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{x} \right| &\leq \frac{|f(a)|}{x} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{|x - a|}{x} \\ &< \frac{|f(a)|}{X_2} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$



所以,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

即:当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x) = o(x)$ .

1257. 证明:若函数  $f(x)$  于无穷的区间  $(x_0, +\infty)$  内可微分且当

$$x \rightarrow +\infty \text{ 时, } f(x) = o(x);$$

则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0$ .

证 由条件  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  易得对于任意常数  $a > x_0$ , 均有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(x)}{x} \left( 1 + \frac{a}{x - a} \right) - \frac{f(a)}{x - a} \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

于是,对于  $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ ,  $a_n = \max \{n, x_0 + 1\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 总存在  $b_n > a_n$ , 使

$$\left| \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \right| < \epsilon_n.$$

由拉格朗日定理知,存在  $x_n; a_n < x_n < b_n$ , 使

$$f'(x_n) = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n},$$

即

$$|f'(x_n)| < \epsilon_n (n = 1, 2, \dots).$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f'(x_n)| = 0.$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}.$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}.$$

但是

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arctan \frac{1+x}{1-x}}{x - 1}$$

$$= -\infty$$

及

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\arctan \frac{1+x}{1-x}}{x - 1}$$

$$= +\infty,$$

所以  $f'_-(1)$  及  $f'_+(1)$  皆不存在.

$y = f(x)$  的图形

如图 2.38 所示.

当  $x \rightarrow 1-0$  时,

$f(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ; 当  $x \rightarrow$

$1+0$  时,  $f(x) \rightarrow -$

$\frac{\pi}{2}$ .

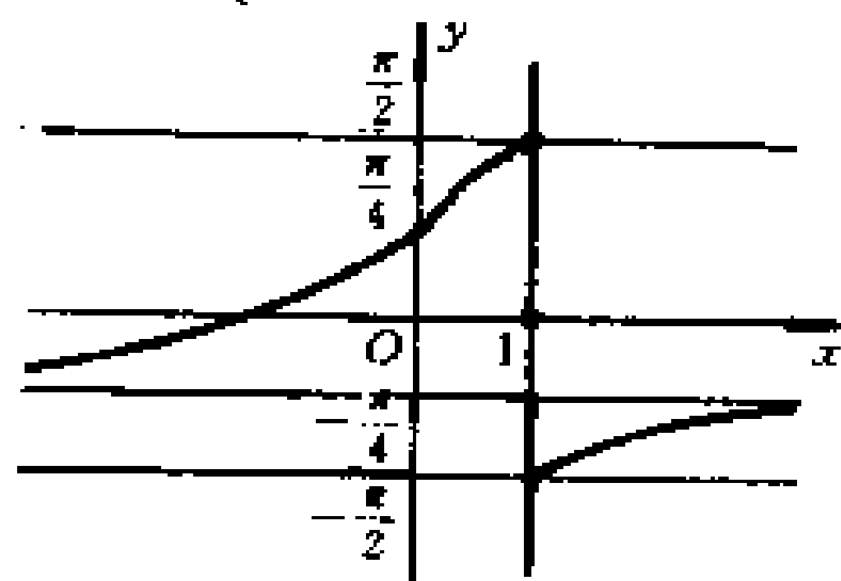


图 2.38

即  $x = 1$  为  $f(x)$  的第一类

不连续点, 即在  $x = 1$  处  $f(x)$  产生跳跃, 所以  $f(x)$  在

$x = 1$  处无导数.

1259. 证明: 若当  $a < x < b$  时,  $f'(x) = 0$ , 则当

$a < x < b$  时,  $f(x) = \text{常数}$ .

证 在  $(a, b)$  内取一定点  $x_0$ , 则当  $a < x < b$  时, 按有限增量公式可得

$$f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0)$$

其中  $c$  在  $x_0$  与  $x$  之间. 由于  $f'(c) = 0$ , 故

$$f(x) - f(x_0) = 0,$$

即

$$f(x) = f(x_0) = \text{常数}.$$

1260. 证明: 导函数为常数

$$f'(x) = k$$

的唯一函数  $f(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 是线性函数:

$$f(x) = kx + b.$$

证  $[f(x) - kx]' = f'(x) - k = k - k = 0$ ,

于是,

$$f(x) - kx = b \quad (b \text{ 为常数}).$$

故  $f(x)$  必为线性函数:  $f(x) = kx + b$ . 证完.

1261. 设  $f^{(n)}(x) = 0$ , 则函数  $f(x)$  有什么性质?

解 由  $f^{(n)}(x) = 0$ , 于是  $f^{(n-1)}(x) = c$  ( $c$  为常数).

再由 1260 题的结果得知

$$f^{(n-2)}(x) = cx + b.$$

假设

$$f^{(k)}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-k-1}x^{n-k-1},$$

并令

$$\Phi(x) = f^{(k-1)}(x) - \left( a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \cdots + \frac{1}{n-k}a_{n-k-1}x^{n-k} \right),$$

则有  $\Phi'(x) = f^{(k)}(x) - (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-k-1}x^{n-k-1}) = 0$ .

由 1259 题知  $\Phi(x) = b_0$ , 并记  $a_0 = b_1, \frac{1}{2}a_1 = b_2, \cdots, \frac{1}{n-k}a_{n-k-1} = b_{n-k}$ , 则有

$$f^{(k-1)}(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-k}x^{n-k}.$$

依归纳法便有

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1},$$

它是  $n-1$  次多项式, 其中  $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$  是常数, 而且是任意的.

1262. 证明: 满足方程

$$y' = \lambda y (\lambda = \text{常数})$$

的唯一函数  $y = y(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 是指数函数:

$$y = Ce^{\lambda x},$$

其中  $C$  为任意常数.

$$\begin{aligned} \text{证 } (ye^{-\lambda x})' &= y'e^{-\lambda x} - \lambda ye^{-\lambda x} \\ &= \lambda ye^{-\lambda x} - \lambda ye^{-\lambda x} \\ &= 0, \end{aligned}$$

于是,

$$ye^{-\lambda x} = C \quad (C \text{ 为常数})$$

即

$$y = Ce^{\lambda x}.$$

1263. 检验函数

$$f(x) = \arctan \frac{x+a}{1-ax}$$

及

$$g(x) = \arctan x$$

于范围: (1)  $ax < 1$  及 (2)  $ax > 1$  内有相同的导函数.

推出这些函数间的关系.

**解** 当  $ax < 1$  或  $ax > 1$  时,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left( \frac{x+a}{1-ax} \right)^2} \cdot \frac{1-ax + a(x+a)}{(1-ax)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2}, \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

故有

$$f'(x) = g'(x) \quad (ax < 1 \text{ 或 } ax > 1).$$

因此

$$f(x) - g(x) = C_1, \text{ 当 } ax < 1 \text{ 时.} \quad (1)$$

$$f(x) - g(x) = C_2, \text{ 当 } ax > 1 \text{ 时,} \quad (2)$$

下面确定常数  $C_1$  与  $C_2$ . 设  $a > 0$  ( $a < 0$  情形可类似地讨论).

在(1)中令  $x \rightarrow -\infty$ , 得

$$-\arctan \frac{1}{a} + \frac{\pi}{2} = C_1,$$

故  $C_1 = \arctan a$ . 因此

$$\arctan \frac{x+a}{1-ax} - \arctan x = \arctan a \quad (ax < 1).$$

在(2)中令  $x \rightarrow +\infty$ , 得

$$- \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{a} - \frac{\pi}{2} = C_2,$$

故  $C_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tga} - \pi$ . 因此

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+a}{1-ax} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \operatorname{tga} - \pi \quad (ax > 1).$$

1264. 证明下列恒等式:

$$(a) 2\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \sin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x,$$

当  $|x| \geq 1$ ;

$$(6) 3\operatorname{arc} \cos x - \operatorname{arc}(3x - 4x^3) = \pi, \text{ 当 } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

证 (a) 当  $|x| > 1$  时, 由于

$$\begin{aligned} & \left( 2\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \sin \frac{2x}{1+x^2} \right), \\ &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \\ & \quad \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = 0, \end{aligned}$$

故

$$2\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \sin \frac{2x}{1+x^2} = C_1, \text{ 当 } x > 1 \text{ 时};$$

$$2\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \sin \frac{2x}{1+x^2} = C_2, \text{ 当 } x < -1 \text{ 时}.$$

下面确定常数  $C_1$  与  $C_2$ .

令  $x = \sqrt{3}$ , 代入前一式, 得  $C_1 = \pi$ ;

令  $x = -\sqrt{3}$ , 代入后一式, 得  $C_2 = -\pi$ .

从而当  $|x| \neq 1$  时, 有

$$2\operatorname{arc\,tg}x + \operatorname{arc\,sin}\frac{2x}{1+x^2}$$

$$= \begin{cases} \pi, & \text{当 } x > 1 \text{ 时;} \\ -\pi, & \text{当 } x < -1 \text{ 时.} \end{cases}$$

而当  $|x| = 1$  时, 上式仍然成立. 于是, 当  $|x| \geq 1$  时, 有

$$2\operatorname{arc\,tg}x + \operatorname{arc\,sin}\frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn}x.$$

(6) 当  $|x| < \frac{1}{2}$  时, 由于

$$[3\operatorname{arc\,cos}x - \operatorname{arc\,cos}(3x - 4x^3)]'$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}$$

$$\cdot (3-12x^2) = 0,$$

故有

$$3\operatorname{arc\,cos}x - \operatorname{arc\,cos}(3x - 4x^3) = C$$

$$\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right).$$

其中  $C$  为常数. 令  $x = 0$ , 代入上式, 即可求出  $C = \pi$ . 于是

$$3\operatorname{arc\,cos}x - \operatorname{arc\,cos}(3x - 4x^3) = \pi$$

$$\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right).$$

由于上式左端的函数在  $x = \frac{1}{2}$  左连续, 在  $x = -\frac{1}{2}$  右连续, 分别取极限即知上式当  $x = \frac{1}{2}$  和  $x = -\frac{1}{2}$  时也成立. 于是

$$3\operatorname{arc\,cos}x - \operatorname{arc\,cos}(3x - 4x^3) = \pi$$

$$\left( |x| \leq \frac{1}{2} \right).$$

1265. 证明: 若函数  $f(x)$  (1) 在闭区间  $[a, b]$  上是连续的; (2) 于此线段内有有穷的导函数  $f'(x)$ ; (3) 非线性函数, 则于区间  $(a, b)$  内至少能找到一点  $c$ , 满足

$$|f'(c)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

作出这个事实的几何解释.

证 当  $a \leq x \leq b$  时, 设

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

易知  $F(a) = F(b) = 0$ , 且当  $a < x < b$  时,  $F(x) \neq 0$  (因为  $f(x)$  为非线性函数). 设在  $c_1$  ( $a < c_1 < b$ ) 点,  $F(c_1) \neq 0$ , 不妨设  $F(c_1) > 0$ , 在区间  $[a, c_1]$  与  $[c_1, b]$  上分别应用拉格朗日定理, 可知存在

$$\begin{aligned} \xi_1 \in (a, c_1) \text{ 使 } F'(\xi_1) &= \frac{F(c_1) - F(a)}{c_1 - a} \\ &= \frac{F(c_1)}{c_1 - a} > 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_2 \in (a, c_1) \text{ 使 } F'(\xi_2) &= \frac{F(b) - F(c_1)}{b - c_1} \\ &= -\frac{F(c_1)}{b - c_1} < 0. \end{aligned}$$

因而,

$$f'(\xi_1) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad (1)$$

$$f'(\xi_2) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad (2)$$

由此可知:

$$\text{当 } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0 \text{ 时, 由 (1),}$$



$$|f'(\xi_1)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|;$$

当  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$  时, 由 (2),

$$|f'(\xi_2)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|,$$

于是命题得证.

这个事实的几何意义是: 对于一条非直线的连续曲线段(线段上每点都存在不垂直于  $Ox$  轴的切线), 在曲线上至少存在一点  $c$ , 使曲线在该点的切线斜率的绝对值大于连接该线段两个端点,  $(a, f(a)), (b, f(b))$  的弦的斜率

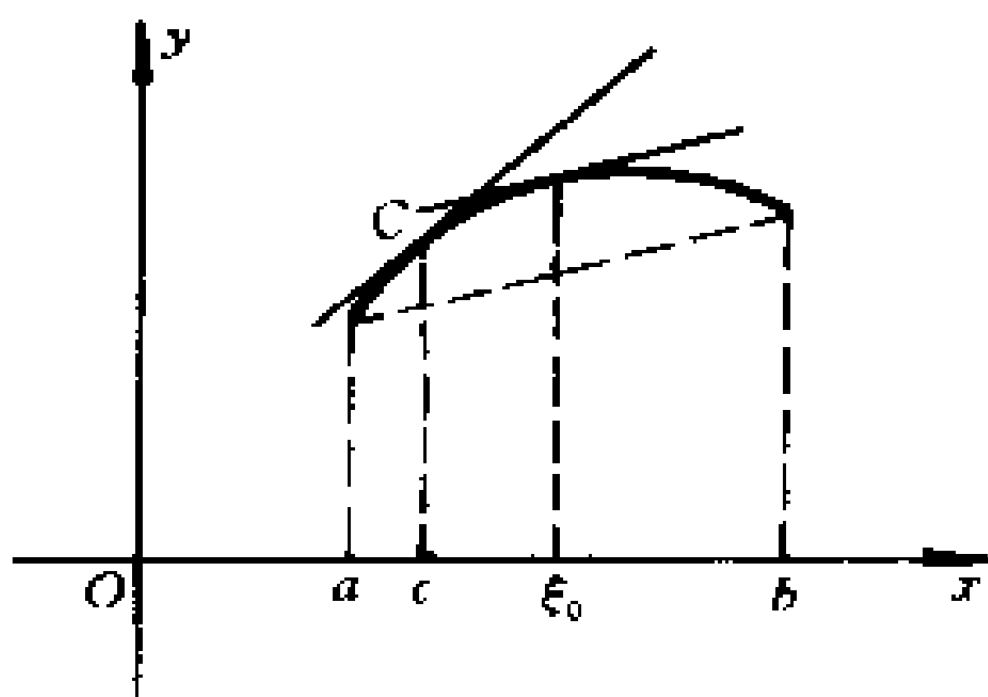


图 2.39

的绝对值, 换句话说, 此切线比此弦“陡”, 如图 2.39 所示.

1266. 若函数  $f(x)$ : (1) 在区间  $[a, b]$  上有二阶导函数  $f''(x)$  及 (2)  $f'(a) = f'(b) = 0$ , 则在区间  $(a, b)$  内至少存在一点  $c$ , 满足

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

证 令

$$K = \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

用反证法, 即设  $|f''(x)| < K$  ( $a < x < b$ ).

对于函数( $x_0$  是  $[a, b]$  中任意固定的一点)

$$F(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$$

及

$$G(x) = (x - x_0)^2,$$

两次应用哥西定理<sup>\*</sup>), 即得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(\xi), \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\xi$  在  $x_0$  与  $x$  之间(即  $x_0 \leq \xi \leq x$ ),  $x$  为  $[a, b]$  中任意点. 特别, 在(1) 式中取

$$x_0 = a, x = \frac{a+b}{2},$$

并利用已知条件  $f'(a) = 0$ , 则有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c_1),$$

其中  $c_1$  满足  $a < c_1 < \frac{a+b}{2}$ .

于是,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) \right| < \frac{(b-a)^2}{8} K.$$

同理在(1) 式中取  $x_0 = b, x = \frac{a+b}{2}$ , 并利用已知条件  $f'(b) = 0$ , 则得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c_2),$$

其中  $\frac{a+b}{2} < c_2 < b$ .

于是

$$\left| f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| < \frac{(b-a)^2}{8} K.$$

其中  $x_0 < \xi < x$  (以后即将看到, 这就是所谓的台劳公式, 这里就顺便给了一个关于二阶的台劳公式的另一种推证方法.)

1267. 汽车从某点开始行驶, 于  $t$  秒钟内走完了路程, 于此时间内经过了距离  $s$  米. 证明汽车运动的加速度的绝对值在某瞬间不小于  $\frac{4s}{t^2}$  米/秒<sup>2</sup>.

证 利用 1266 题的结果即可得证. 此时

$$s = f(t),$$

$$f(t) - f(0) = s, t - 0 = t.$$

故  $a = \left. \frac{d^2 s}{dt^2} \right|_{t=t_1}$  的绝对值

$$|a| \geq \frac{4s}{t^2}.$$

## § 7. 函数的增大与减小. 不等式

1° 函数的增大和减小 若当

$$a \leq x_1 < x_2 \leq b \text{ 时, } f(x_2) > f(x_1)$$

[或当  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$  时,  $f(x_2) < f(x_1)$ ], 则称函数  $f(x)$  于闭区间  $[a, b]$  上 增大(或对应地减小).

若可微分的函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上增大(或减小), 则当

$$a \leq x \leq b \text{ 时, } f'(x) \geq 0$$

[或对应地当  $a \leq x \leq b$  时,  $f'(x) \leq 0$ ].

2° 函数增大(或减小)的充分条件 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上是连续的, 并且在其内有正的(或负的)导函数  $f'(x)$ , 则函数  $f(x)$  于  $[a, b]$  内增大(或对应地减小).

求下列函数在严格意义上的单调(增大或减小)的区间:

1268.  $y = 2 + x - x^2$

解  $y' = 1 - 2x$ .

当  $-\infty < x < \frac{1}{2}$  时,  $y' > 0$ , 函数增大;

当  $\frac{1}{2} < x < +\infty$  时,  $y' < 0$ , 函数减小.

1269.  $y = 3x - x^3$ .

解  $y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x)(1 + x)$ .

当  $-\infty < x < -1$  时,  $y' < 0$ , 函数减小;

当  $-1 < x < 1$  时,  $y' > 0$ , 函数增大;

当  $1 < x < +\infty$  时,  $y' < 0$ , 函数减小.

1270.  $y = \frac{2x}{1 + x^2}$ .

解  $y' = \frac{2(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^2)^2}$ .

当  $-\infty < x < -1$  时,  $y' < 0$ , 函数减小;

当  $-1 < x < 1$  时,  $y' > 0$ , 函数增大;

当  $1 < x < +\infty$  时,  $y' < 0$ , 函数减小.

1271.  $y = \frac{\sqrt{x}}{x + 100} (x \geq 0)$ .

解  $y' = \frac{-x + 100}{2\sqrt{x}(x + 100)^2}$ .

当  $0 < x < 100$  时,  $y' > 0$ , 函数增大;

当  $100 < x < +\infty$  时,  $y' < 0$ , 函数减小.

1272.  $y = x + \sin x$ .

解  $y' = 1 + \cos x \geq 0$ .

当  $-\infty < x < +\infty$  时, 函数增大.

1273.  $y = x + |\sin 2x|$ .

解  $y' = 1 + 2 \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} \cos 2x$

$$\left\{x \neq \frac{k\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right\}.$$

当  $x \in \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$  时,  $y' > 0$ , 函数增大;

当  $x \in \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$  时,  $y' < 0$ , 函数减小,

其中  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

1274.  $y = \cos \frac{\pi}{x}.$

解  $y' = \frac{\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}.$

当  $2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi$  及  $-(2k+2)\pi < \frac{\pi}{x} < -(2k+1)\pi$ .

$0 < \frac{\pi}{x} < \pi$  时, 即  $x > 1, x \in \left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)$  及  $x \in \left(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k+2}\right)$  时,  $y' > 0$ , 所以函数增大 ( $k = 1, 2, \dots$ ).

同理, 当  $x \in \left(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right)$  及  $x \in \left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1}\right)$  时,  $y' < 0$ , 函数减小 ( $k = 1, 2, \dots$ ).

1275.  $y = \frac{x^2}{2^x}.$

解  $y' = \frac{2x - x^2 \ln 2}{2^x}.$

当  $-\infty < x < 0$  及  $\frac{2}{\ln 2} < x < +\infty$  时,  $y' < 0$ , 函数减小;

当  $0 < x < \frac{2}{\ln 2}$  时,  $y' > 0$ , 函数增大.

1276.  $y = x^n e^{-x} (n > 0, x \geq 0).$

解  $y' = x^{n-1} e^{-x} (n - x).$

当  $x \in (0, n)$  时,  $y' > 0$ , 函数增大;

当  $x \in (n, +\infty)$  时,  $y' < 0$ , 函数减小.

1277.  $y = x^2 - \ln x^2.$

解  $y' = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}.$

当  $-\infty < x < -1$  及  $0 < x < 1$  时,  $y' < 0$ , 函数减小;

当  $-1 < x < 0$  及  $1 < x < +\infty$  时,  $y' > 0$ , 函数增大.

1278. 若  $x > 0, f(x) = x \left( \sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x \right)$  及  $f(0) = 0.$

解  $f'(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x + \cos \ln x$   
 $= \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} + \ln x \right) (x > 0).$

令  $f'(x) = 0$ , 得

$$\sin \left( \ln x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

解上述方程得

$$x = e^{-\frac{11}{12}\pi + 2k\pi}, x = e^{-\frac{7}{12}\pi + 2k\pi}$$

或  $x = e^{\frac{13}{12}\pi + 2k\pi}, x = e^{\frac{17}{12}\pi + 2k\pi}$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

当  $x \in (e^{-\frac{7}{12}\pi + 2k\pi}, e^{\frac{13}{12}\pi + 2k\pi})$  时,  $f'(x) > 0$ ,

函数增大;

当  $x \in (e^{\frac{13}{12}\pi - 2k\pi}, e^{\frac{17}{12}\pi + 2k\pi})$  时,  $f'(x) < 0$ ,

函数减小.

1279. 证明: 内接于圆的正  $n$  边形, 当边的数目  $n$  增加时, 其周界  $p_n$  增加, 而外切于此圆的正  $n$  边形的周界  $P_n$  则减小. 利用这点来证明, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $p_n$  及  $P_n$  有相同的极限.

证 如图 2.40 所示,

我们有

$$\begin{aligned} p_n &= 2nx \\ &= 2na \sin \alpha \\ &= 2na \sin \frac{\pi}{n}, \\ P_n &= 2ny \\ &= 2na \operatorname{tg} \alpha \\ &= 2na \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

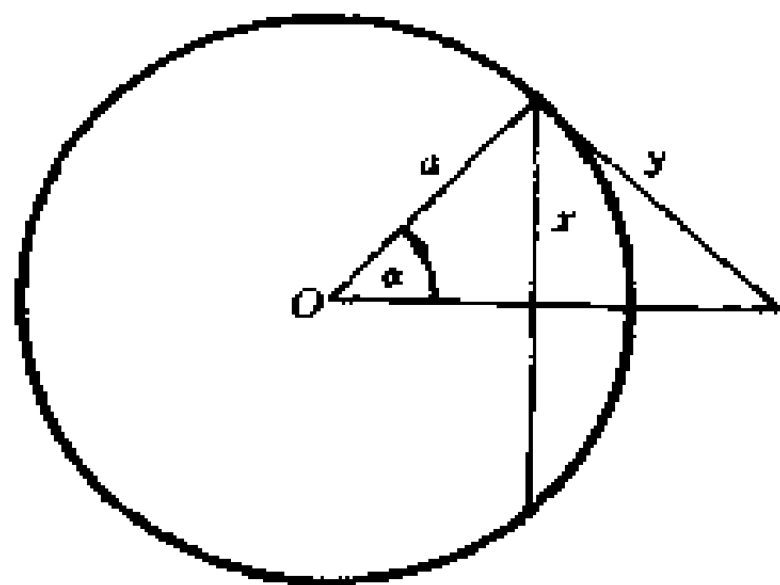


图 2.40

考虑  $f(x) = \frac{2a}{x} \sin \pi x$ . 易证当  $x(x > 0)$  很小时有  $f'(x) < 0$ , 从而当  $x$  变小时  $f(x)$  增大. 所以,  $p_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$  当  $n$  增大时,  $p_n$  逐渐增大. 同样, 令  $g(x) = \frac{2a}{x} \operatorname{tg} \pi x$ , 利用  $x < \operatorname{tg} x$  (当  $x$  很小时,  $x > 0$ ), 可证得  $g'(x) > 0$ , 情形相反, 当  $x$  变小时,  $g(x)$  逐渐减小, 故  $P_n = g\left(\frac{1}{n}\right)$  当  $n$  变大时逐渐变小. 总之, 有  $p_n < p_{n+1}$  及  $P_{n+1} < P_n$ , 并且显然有  $p_{n+1} < P_{n+1}$ . 于是

$$p_n < p_{n+1} < P_{n+1} < P_n,$$

故  $\{P_n\}$  是有界减数列,  $\{p_n\}$  是有界增数列, 从而它们的极限都存在, 但

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n - p_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi a \left( \frac{\lg \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} - \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \right) = 0, \end{aligned}$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n.$$

1280. 证明: 函数

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

于区间  $(-\infty, -1)$  及  $(0, +\infty)$  内增大.

证 设  $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})}$ , 则

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right].$$

由于当  $x \in (-\infty, -1)$  时,  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > 0$ , 因此要看  $y'$  为正或为负, 只需看  $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$  的正负性.

再设  $z = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$ , 则

$$z' = -\frac{1}{x(1+x)^2} > 0, \quad x \in (-\infty, -1),$$

故当  $-\infty < x < -1$  时  $z$  增大, 又  $\lim_{x \rightarrow -\infty} z = 0$ , 因而  $z > 0$ .

于是, 在  $(-\infty, -1)$  内  $y' > 0$ . 因此, 函数

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$



在区间 $(-\infty, -1)$ 内增大.

同理可证, 函数 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  在区间 $(0, +\infty)$ 内增大.

1281. 证明: 有理整函数

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

于区间 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 内是单调的(就严格的意义而言!), 其中 $x_0$ 为充分大的正数.

证 由于

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} \\ &= x^{n-1} \left( na_n + \frac{(n-1)a_{n-1}}{x} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} \right), \end{aligned}$$

而

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{(n-1)a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} \right) = 0,$$

故存在 $x_0 > 0$ , 使当 $|x| > x_0$ 时,

$$\left| \frac{(n-1)a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} \right| < n|a_n|.$$

由此可知, 当 $-\infty < x < -x_0$ 或 $x_0 < x < +\infty$ 时 $P'_n(x)$ 均保持定号(例如, 若 $a_0 > 0$ , 则当 $x_0 < x < +\infty$ 时,  $P'_n(x) > 0$ ), 故 $P_n(x)$ 在 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 内都是严格单调的. 证毕.

1282. 证明: 有理函数

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m} \\ &\quad (m+n \geq 1, m \neq n^*, a_nb_m \neq 0) \end{aligned}$$

于区间 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 内是单调的(就严格的意义而言!), 其中  $x_0$  为充分大的正数.

证 我们有

$$\begin{aligned}
 R'(x) &= \frac{1}{(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)^2} \{ [a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}] [b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m] - [b_1 + 2b_2x + \cdots + mb_mx^{m-1}] [a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n] \} \\
 &= \frac{1}{(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)^2} \{ (a_1b_0 - a_0b_1) + 2(a_2b_0 - a_0b_2)x + \cdots + [(n-m+1)a_nb_{m-1} - (n-m-1)a_{n-1}b_m]x^{m+n-2} + (n-m)a_nb_mx^{m+n-1} \} \\
 &= \frac{x^{m+n-1}}{(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)^2} \left[ \frac{(n-m)a_nb_m + (n-m+1)a_nb_{m-1} - (n-m-1)a_{n-1}b_m}{x} + \cdots + \frac{a_1b_0 - a_0b_1}{x^{m+n-1}} \right].
 \end{aligned}$$

仿 1281 题之证法, 可知存在  $x_0 > 0$ , 使当  $|x| > x_0$  时上式右端方括弧内的式子与第一项  $(n-m)a_nb_m$  同符号, 由此可知, 当  $-\infty < x < -x_0$  或  $x_0 < x < +\infty$  时  $R'_*(x)$  均保持定号, 故  $R(x)$  在  $(-\infty, -x_0)$  及  $(x_0, +\infty)$  中都是严格单调的.

\* ) 本题应加上条件  $m \neq n$  (原题上没有). 否则所述结论不成立. 例如, 若  $m = n, a_i = b_i (i = 0, 1, \cdots,$

$n$ ), 则  $R(x) \equiv 1$ , 它在  $(x_0, +\infty)$  上显然不是严格单调的.

1283. 单调函数的导函数是否也必为单调的?

解 不. 例如函数

$$f(x) = x + \sin x,$$

在区间  $(0, +\infty)$  内, 由于  $f'(x) = 1 + \cos x > 0$  (除  $x = (2n+1)\pi, n = 0, 1, \dots$ ), 所以它是单调增加的; 然而其导函数  $f'(x)$  却不是单调的. 事实上由于  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, f'(\pi) = 0, f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$ , 显见并非是单调的.

1284. 证明: 若  $\varphi(x)$  为单调增大的可微分的函数, 且当

$$x \geq x_0 \text{ 时, } |f'(x)| \leq \varphi(x),$$

则当  $x \geq x_0$  时,  $|f(x) - f(x_0)| \leq \varphi(x) - \varphi(x_0)$ .  
对这个事实作几何的解释.

证 证法一:

作函数  $\psi(x) = \varphi(x) - f(x)$ , 由拉格朗日定理知

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \psi'(\xi)(x - x_0) \quad (x_0 < \xi < x).$$

由  $|f'(x)| \leq \varphi(x)$  知

$$\psi'(\xi) = \varphi'(\xi) - f'(\xi) \geq 0.$$

从而  $\psi(x) - \psi(x_0) \geq 0$  (当  $x \geq x_0$  时), 由此得

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq f(x) - f(x_0). \quad (1)$$

再令  $\psi_1(x) = \varphi(x) + f(x)$ , 同理有  $\psi_1(x) - \psi_1(x_0) \geq 0$  (当  $x \geq x_0$  时), 由此得

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq f(x_0) - f(x). \quad (2)$$

结合(1)和(2)便得

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq |f(x) - f(x_0)|.$$

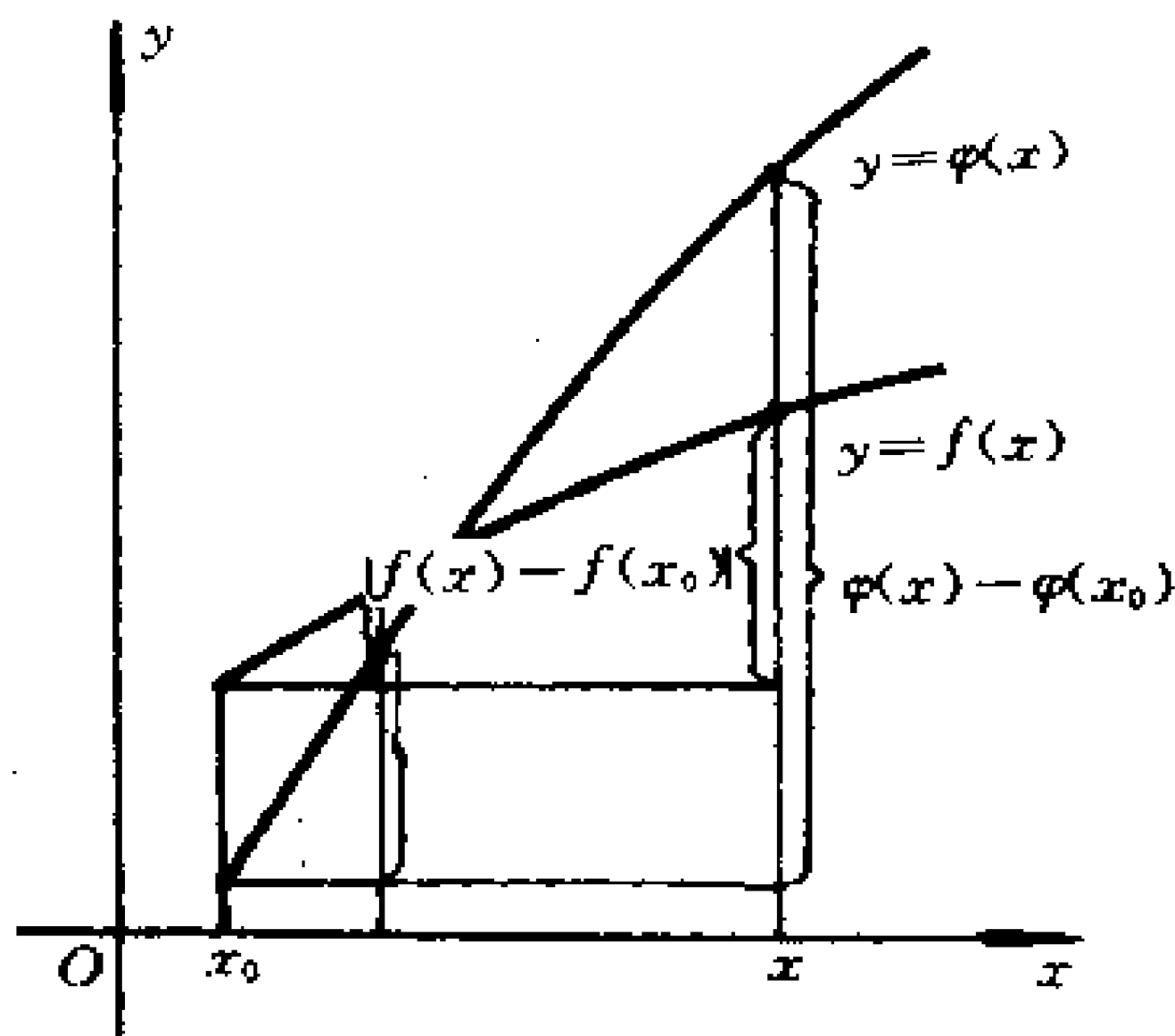


图 2.41

于是,  $f\left(a - \frac{f(a)}{k}\right) > 0$ . 又  $f(a) < 0$ , 故根据连续函数的介值定理知, 方程  $f(x) = 0$  在  $\left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$  上至少有一实根. 又因为当  $x > a$  时,  $f'(x) > 0$ , 故  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  内严格单调上升, 由此可知, 方程  $f(x) = 0$  在  $\left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$  内恰有一个实根.

1286. 若于某邻域  $|x - x_0| < \delta$  内, 函数增量  $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$  的符号与自变数增量  $\Delta x_0 = x - x_0$  的符号相同, 函数  $f(x)$  称为在  $x_0$  点增大.

证明: 若函数  $f(x)$  ( $a < x < b$ ) 于有穷或无穷的区间  $(a, b)$  内的每一点增大, 则它在此区间内为增函数.

证 要证对任意两点  $x_1 < x_2$  ( $a < x_1 < x_2 < b$ ), 都有

$f(x_1) < f(x_2)$ . 对  $[x_1, x_2]$  中每一点  $c$ , 由假定都存在开区间  $\Delta_c = (c - \delta_c, c + \delta_c)$  使当  $0 < |x - c| < \delta_c$  时,  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$ . 于是, 诸区间  $\{\Delta_c\}$  ( $c$  取遍  $[x_1, x_2]$ ) 形成  $[x_1, x_2]$  的一个开复盖. 由波内耳有限复盖定理, 从  $\{\Delta_c\}$  中可选出有限个, 设为  $\Delta_{c_1}, \Delta_{c_2}, \dots, \Delta_{c_m}$ , 它们已经复盖了  $[x_1, x_2]$ . 不妨设  $x_1 < c_1 < c_2 < \dots < c_m < x_2$ , 而且可设诸  $\Delta_{c_i}$  互不包含 (因若  $\Delta_{c_i} \subset \Delta_{c_j}$ , 则可将  $\Delta_{c_i}$  舍去). 于是, 必有  $x_1 \in \Delta_{c_1}$  (因若  $x_1$  不属于  $\Delta_{c_1}$ , 而属于某  $\Delta_{c_j}$ ,  $j > 1$ , 则显然有  $\Delta_{c_1} \subset \Delta_{c_j}$ , 此与诸  $\Delta_{c_i}$  互不包含矛盾). 另外, 易知  $\Delta_{c_i}$  与  $\Delta_{c_{i+1}}$  ( $i = 1, 2, \dots, m-1$ ) 必有公共点  $\bar{x}_i$  (因若  $\Delta_{c_i}$  与  $\Delta_{c_{i+1}}$  没有公共点, 则点  $c_i + \delta_{c_i}$  必属于某  $\Delta_{c_j}$ ,  $j \neq i, j \neq i+1$ . 若  $j < i$ , 则  $\Delta_{c_i} \subset \Delta_{c_j}$ , 矛盾; 若  $j > i+1$ , 则  $\Delta_{c_{i+1}} \subset \Delta_{c_j}$ , 也矛盾). 显然可取公共点  $\bar{x}_i$  满足  $c_i < \bar{x}_i < c_{i+1}$ .

于是

$$f(c_i) < f(\bar{x}_i) < f(c_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, m-1).$$

同理, 可知  $x_2 \in \Delta_{c_m}$ . 于是, 我们有

$$f(x_1) < f(c_1) < f(c_2) < \dots < f(c_m) < f(x_2).$$

证完.

#### 1287. 证明: 函数

$$f(x) = x + x^2 \sin \frac{1}{x}, \text{ 若 } x \neq 0 \text{ 及 } f(0) = 0,$$

于点  $x = 0$  增大, 但在含这点的任何区间  $(-\epsilon, \epsilon)$  中并非增大的, 其中  $\epsilon > 0$  为任意小的数. 作出此函数的略

图.

证 当  $x \neq 0$  时,

$$f'(x) = 1 + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + \Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 1 > 0,$$

所以  $f(x)$  在  $x = 0$  点增大. 又当  $x \neq 0$  时,

$$f''(x) = 2 \sin \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x},$$

$$f''\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = -4n\pi \begin{cases} < 0, n \text{ 为正整数;} \\ > 0, n \text{ 为负整数;} \end{cases}$$

$$\text{而 } f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 0.$$

故  $f(x)$  在点  $x_n$

$$= \frac{1}{2n\pi} (n = 1, 2,$$

$\dots$ ) 都达极大值.

由于  $x_n = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow$

$0$ , 故  $f(x)$  在

$(-\epsilon, \epsilon)$  内不是

增大的 (作无穷

次振荡, 如图

2.42 所示).

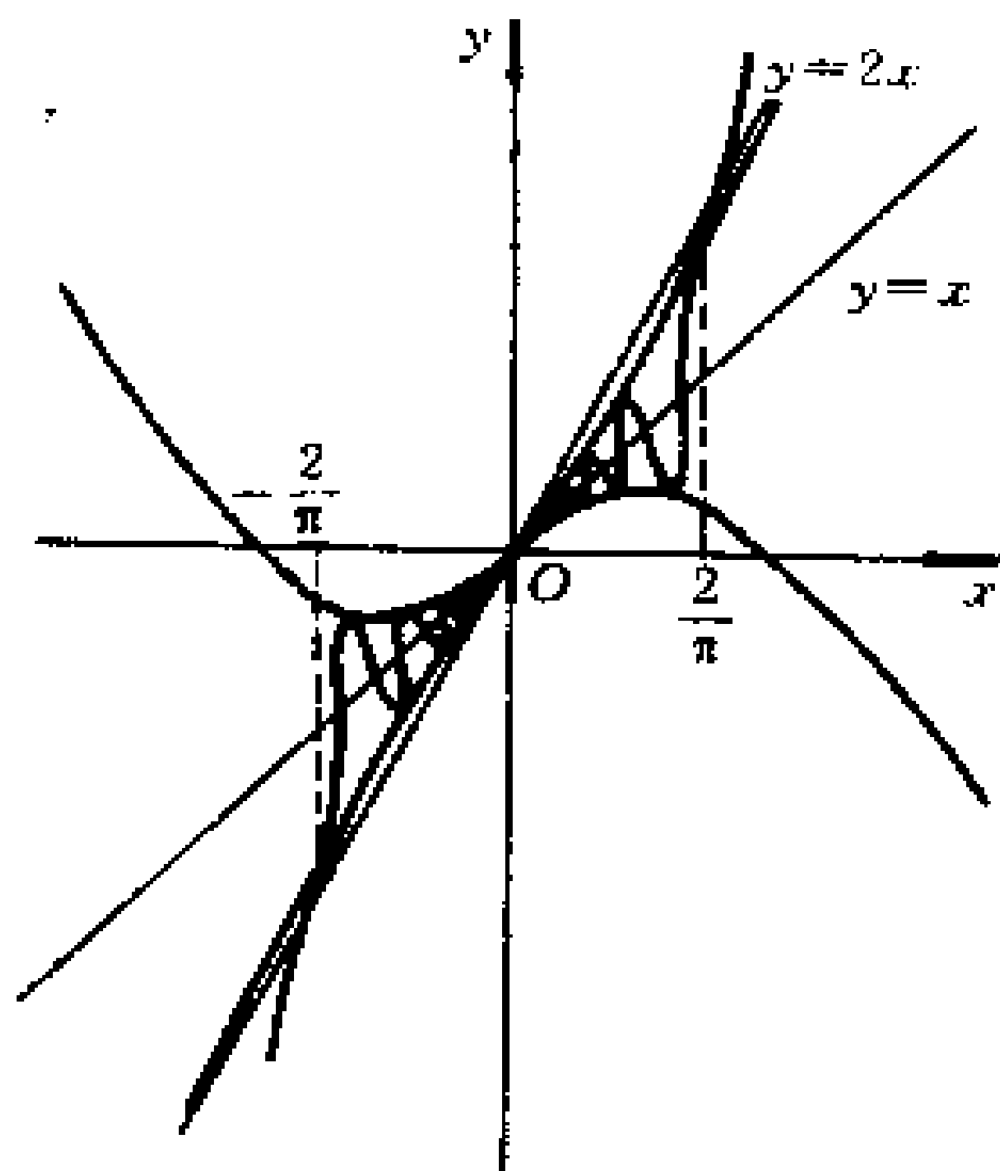


图 2.42

1288. 证明定理: 设(1)

函数  $\varphi(x)$  及  $\psi(x)$  可微分  $n$  次; (2)  $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0) (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ ; (3) 当  $x > x_0$  时,  $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ , 则当  $x > x_0$  时有不等式

$$\varphi(x) > \psi(x).$$

证 设  $F(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ , 则由于  $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ , 所以

$$F^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x) - \psi^{(n)}(x) > 0 \quad (x > x_0).$$

因此  $F^{(n-1)}(x)$  在  $x > x_0$  时是严格增大的. 另外, 由条件(2)得

$$F^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0) - \psi^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

因此

$$F^{(n-1)}(x) > F^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad (x > x_0).$$

由此又知  $F^{(n-2)}(x)$  在  $x > x_0$  时是严格增大的. 再由条件(2), 知

$$F^{(n-2)}(x_0) = \varphi^{(n-2)}(x_0) - \psi^{(n-2)}(x_0) = 0,$$

故

$$F^{(n-2)}(x) > F^{(n-2)}(x_0) = 0 \quad (x > x_0).$$

依此类推, 最后得

$$F(x) > F(x_0) = 0 \quad (x > x_0), \text{ 即}$$

$$\varphi(x) > \psi(x) \quad (x > x_0).$$

1289. 证明下列不等式:

(a) 当  $x \neq 0$  时,  $e^x > 1 + x$ ;

(b) 当  $x > 0$  时,  $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ ;

(c) 当  $x > 0$  时,  $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ ;

(r) 当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ ;

(д) 当  $x > 0, y > 0$  及  $0 < \alpha < \beta$  时,

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

作不等式(a)–(r)的几何解释.

证 (a) 设  $f(x) = e^x - (1 + x)$ , 则当  $x > 0$  时,

$$f'(x) = e^x - 1 > 0,$$

所以,  $f(x) > f(0) = 0$  ( $x > 0$ ), 即

$$e^x > 1 + x \quad (x > 0).$$

同理可证, 当  $x < 0$  时,

$$e^x > 1 + x.$$

总之, 当  $x \neq 0$  时,

$$e^x > 1 + x.$$

此不等式的几何意义是, 曲线  $y = e^x$  位于曲线  $y = 1 + x$  的上方. 如图 2.43 所示.

(6) 设  $\varphi(x) = x, \psi(x) = \ln(1 + x)$ , 则

$$\varphi'(x) = 1, \psi'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

当  $x > 0$  时,  $\varphi'(x) > \psi'(x)$ , 即  $\varphi'(x) - \psi'(x) > 0$ ,

且有  $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ , 从而

$$\varphi(x) - \psi(x) > \varphi(0) - \psi(0) = 0 \quad (x > 0),$$

即

$$x - \ln(1 + x) > 0 \quad (x > 0).$$

同理可证, 当  $x < 0$  时,

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x).$$

所以, 当  $x > 0$  时,



$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.$$

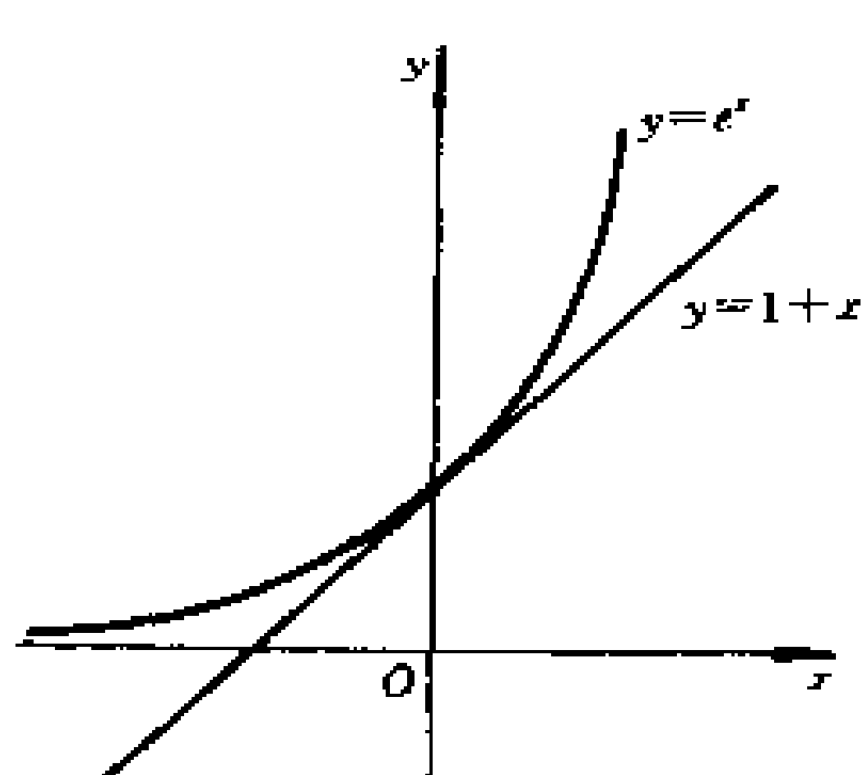


图 2.43

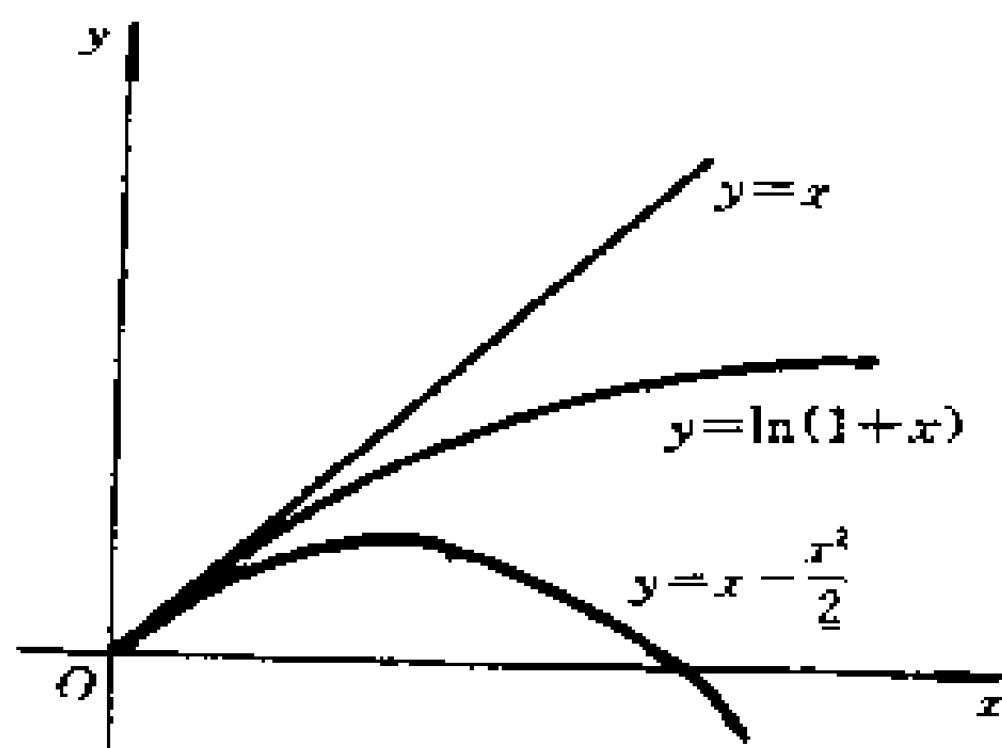


图 2.44

此不等式表示对数函数  $y = \ln(1+x)$  的图形介于抛物线  $y = x - \frac{x^2}{2}$  和直线  $y = x$  之间 ( $x > 0$ ). 如图 2.44 所示.

(B) 令  $F(x) = x - \sin x$ , 则

$$F'(x) = 1 - \cos x > 0 \quad (\text{当 } x > 0, x \neq 2n\pi, \\ n = 1, 2, \dots \text{ 时}),$$

故  $F(x)$  在  $x > 0$  时是严格增大的. 因此, 当  $x > 0$  时, 有

$$F(x) > F(0) = 0,$$

从而

$$x > \sin x \quad (x > 0).$$

其次再证,  $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$  ( $x > 0$ ). 设

$$\psi_1(x) = x - \frac{x^3}{6}, \varphi_1(x) = \sin x,$$

则有

$$\psi_1(0) = \varphi_1(0) = 0, \psi'_1(0) = \varphi'_1(0) = 1.$$

又因  $\psi''_1(x) = -x, \varphi''_1(x) = -\sin x$ , 于是, 当  $x > 0$  时, 有

$$\varphi''_1(x) > \psi''_1(x).$$

利用 1288 题的结果得知,

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} (x > 0).$$

所以, 当  $x > 0$  时

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x <$$

$x$ . 此不等式表示,

在  $y$  轴的右侧, 曲

线  $y = \sin x$  介于

直线  $y = x$  和曲线

$$y = x - \frac{x^3}{6} \text{ 之间,}$$

如图 2.45 所示.

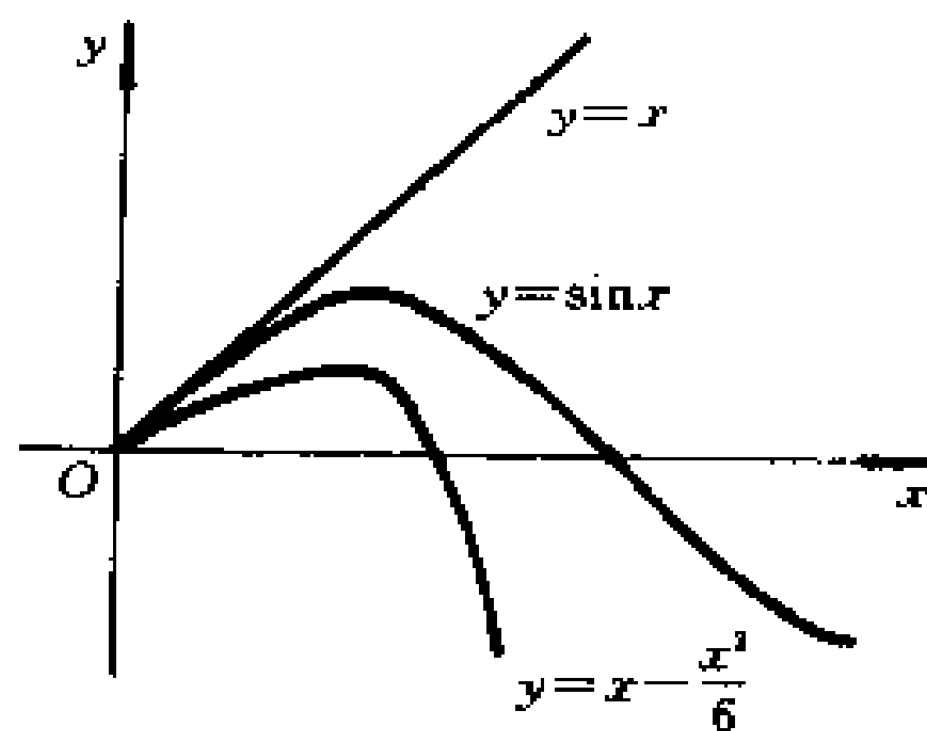


图 2.45

(r) 设  $\varphi(x) = \operatorname{tg} x, \psi(x) = x + \frac{x^3}{3}$ , 则有

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0;$$

$$\varphi'(x) = \sec^2 x, \psi'(x) = 1 + x^2,$$

$$\varphi'(0) = \psi'(0) = 1;$$

$$\varphi''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}, \psi''(x) = 2x,$$

$$\varphi''(0) = \psi''(0) = 0;$$

$$\varphi'''(x) = 2(1 + 3\operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x),$$

$$\psi'''(x) = 2,$$

从而当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $\varphi'''(x) > \psi'''(x)$ .

于是利用 1288 题的结果得知

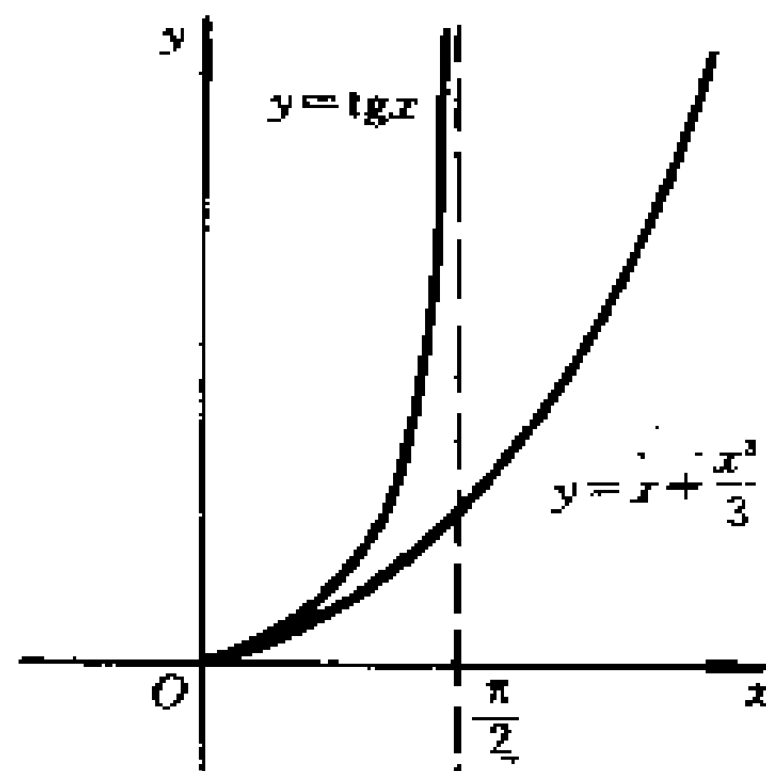
当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $\operatorname{tg} x >$

$x + \frac{x^3}{3}$ . 此不等式表示,

在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内, 曲线  $y =$

$\operatorname{tg} x$  在曲线  $y = x + \frac{x^3}{3}$  的

上方. 如图 2.46 所示.



2.46

(a) 当  $x = y$  时, 由  $0 < \alpha < \beta$  知, 不等式

$$2^{\frac{1}{\alpha}} > 2^{\frac{1}{\beta}} \quad (x > 0, y > 0)$$

显然成立.

当  $x \neq y$ , 且  $x > 0, y > 0$ , 不妨设  $0 < \frac{y}{x} < 1$ .

令  $a = \frac{y}{x}$ , 为证不等式, 只需证明  $f(t) = (1 + a^t)^{\frac{1}{t}}$  严格

递减, 也即只要证明函数  $F(t) = \frac{1}{t} \ln(1 + a^t)$  严格

递减. 实际上, 因为

$$F'(t) = \frac{a^t \ln a}{t(1 + a^t)} - \frac{\ln(1 + a^t)}{t^2}.$$

当  $a^t > 0$  时, 有  $a^t - \frac{a^{2t}}{2} < \ln(1 + a^t)^{**}$ , 所以

$$F'(t) = \frac{a^t \ln a}{t(1 + a^t)} - \frac{a^t - \frac{a^{2t}}{2}}{t^2}.$$

由于  $0 < a < 1$  及  $t > 0$ , 所以  $\ln a < 0$  及  $a^t > a^{2t} > \frac{a^{2t}}{2}$   
 从而  $F'(t) < 0$ , 即  $F(t)$  是严格递减, 从而当  $x \neq y$  时,  
 不等式

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$$

也成立.

作  $f(t) = (1 + a^t)^{\frac{1}{t}}$  的图形, 如图 2.47 所示. 对于  
 $(0, +\infty)$  内任意两个值  $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ , 图形上对应点的  
 纵坐标却相应地减小

$$f(\alpha) > f(\beta).$$

\* ) 利用本题(6)的结果.

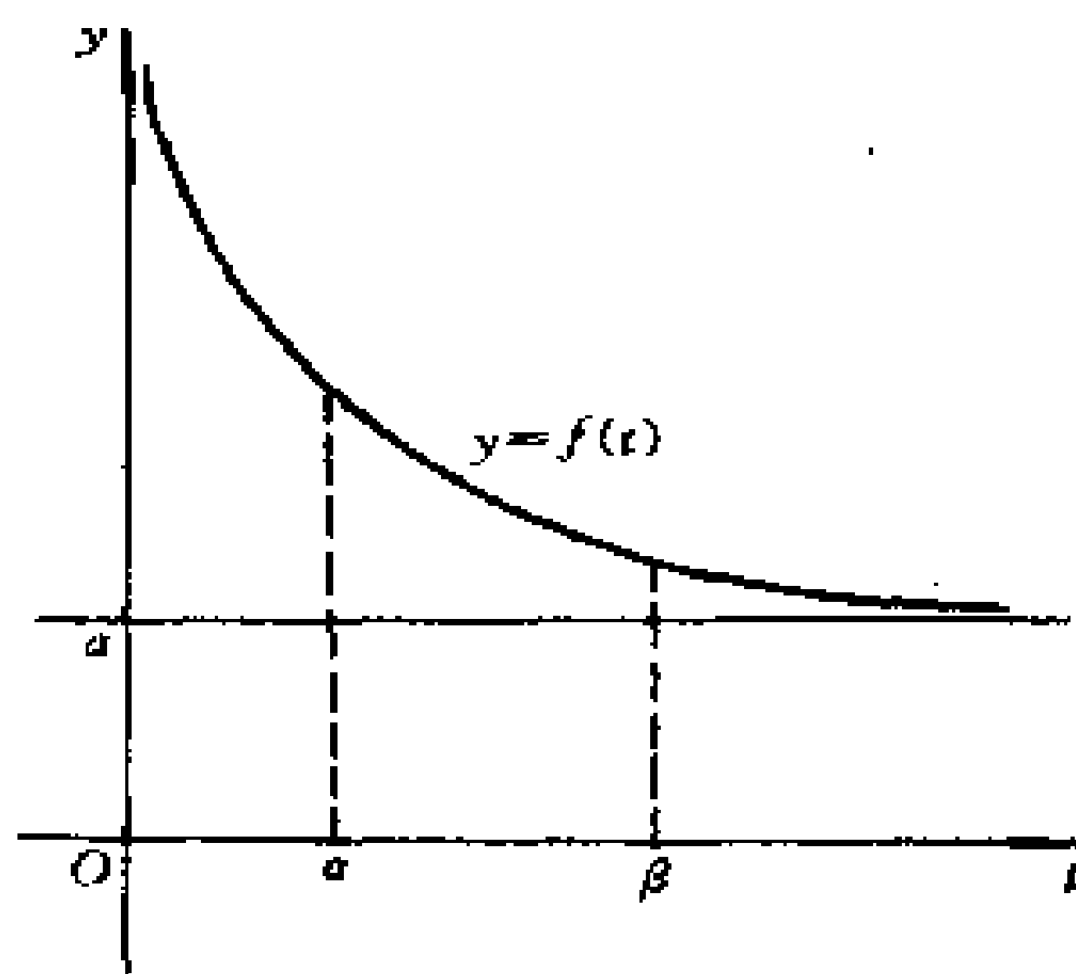


图 2.47

1290. 证明不等式

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x,$$

所以,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e \quad (x > 0).$$

同理可证, 当  $x > 0$  时,  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$  严格递减, 并且有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = e,$$

所以

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} > e \quad (x > 0).$$

1292. 等差级数与等比级数的项的数目相同且有相同的首项与末项, 它们的一切项都是正的. 证明等差级数各项的和大于或等于<sup>\*</sup>等比级数各项的和.

证 证法一:

设等差级数各项为  $a_1, a_2, \dots, a_n$  公差为  $d$ ; 等比级数各项为  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , 公比为  $q$ . 记其和为

$$\sigma = \sum_{k=1}^n a_k, Q = \sum_{k=1}^n b_k.$$

当  $q = 1$  时, 由  $a_1 = b_1$  及  $a_n = b_n$  可知有  $\sigma = Q$ .

当  $q < 1$  时, 由  $a_1 = b_1$  及  $a_n = a_1 + (n-1)d, b_n = b_1 q^{n-1}$  且  $a_n = b_n$  得知

$$a_1 + (n-1)d = b_1 q^{n-1},$$

即

$$d = -\frac{1-q^{n-1}}{n-1}a_1 \quad (a_1 > 0).$$

那么有

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sum_{k=1}^n [a_1 + (k-1)d] \\
&= \sum_{k=1}^n \left[ a_1 - \frac{k-1}{n-1} (1 - q^{n-1}) a_1 \right] \\
&= a_1 \left[ n - \frac{1}{n-1} (1 - q^{n-1}) \sum_{l=0}^{n-1} l \right] \\
&= \frac{n}{2} a_1 (1 + q^{n-1}), \\
Q &= \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.
\end{aligned}$$

研究

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{a_1} (1 - q) (\sigma - Q) \\
&= n(1 - q)(1 + q^{n-1}) - 2(1 - q^n) \\
&= n(1 - q + q^{n-1} - q^n) - 2(1 - q^n) \\
&= (n - 2)(1 - q^n) - nq(1 - q^{n-2}).
\end{aligned}$$

作函数

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= (n - 2)(1 - t^n), \\
\psi(t) &= nt(1 - t^{n-2}),
\end{aligned}$$

则有  $\varphi(1) = \psi(1) = 0, \varphi'(1) = \psi'(1) = -n(n - 2)$ .

但是

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) &= -n(n - 1)(n - 2)t^{n-2}, \\
\psi''(t) &= -n(n - 1)(n - 2)t^{n-3},
\end{aligned}$$

当  $0 < t < 1$  时, 有  $\psi''(t) < \varphi''(t)$ , 利用 1288 题的结果可得,

$$\psi(t) < \varphi(t) \quad (0 < t < 1),$$

即当  $q < 1$  时,  $\psi(q) < \varphi(q)$ . 从而,

$$\frac{2}{a_1}(1-q)(\sigma-Q) = \varphi(q) - \psi(q) > 0.$$

这就证明了  $\sigma > Q$ .

当  $q > 1$  时, 由  $a_n = b_n$  得知

$$d = \frac{q^{n-1} - 1}{n-1}a_1 > 0.$$

又

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{k=1}^n [a_1 + (k-1)d] \\ &= na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \\ &= \frac{n}{2}a_1(1+q^{n-1}),\end{aligned}$$

$$Q = \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

与上述讨论相同, 有

$$\begin{aligned}&\frac{2}{a_1}(q-1)(\sigma-Q) \\ &= (n-2)(q^n-1) - nq(q^{n-2}-1).\end{aligned}$$

作函数

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= (n-2)(t^n-1), \\ \psi(t) &= nt(t^{n-2}-1),\end{aligned}$$

则有

$$\varphi(1) = \psi(1) = 0, \varphi'(1) = \psi'(1) = n(n-2).$$

而

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= n(n-1)(n-2)t^{n-2}, \\ \psi''(t) &= n(n-1)(n-2)t^{n-3},\end{aligned}$$

当  $t > 1$  时, 有  $\varphi''(t) > \psi''(t)$ , 利用 1288 题结果有

$$\varphi(t) > \psi(t).$$

于是当  $q > 1$  时, 便得  $\varphi(q) > \psi(q)$ . 因而

$$\frac{2}{a_1}(q-1)(\sigma-Q) = \varphi(q) - \psi(q) > 0.$$

从而完全证明了  $\sigma > Q$ .

证法二:

设等差级数的公差为  $d$ , 等比级数的公比为  $q$ .

如果  $d = 0$ , 易见两个级数叙列均为常数叙列, 因此其和相等.

如果  $d \neq 0$ , 不妨设  $d > 0$  (否则把末项变为首项, 将叙列颠倒即成), 由于各项均为正的, 所以  $q > 0$ .

设首项为  $a$ , 则末项为  $a + nd = aq^n$ . 考虑函数

$$f(x) = a + xd - aq^x.$$

由于  $f(0) = f(n) = 0$ , 所以在  $(0, n)$  内存在一点  $c$ , 使得  $f'(c) = 0$ , 而  $f''(x) = -aq^x \ln^2 q < 0$ . 从而

$$f'(x) = d - aq^x \ln q$$

为一递减函数, 所以

$$\text{当 } x < c \text{ 时, } f'(x) > 0;$$

$$\text{当 } x > c \text{ 时, } f'(x) < 0.$$

从而当  $0 \leq x \leq n$  时,  $f(x) \geq 0$ , 其中等号当且仅当  $x = 0$  及  $x = n$  时成立. 特别是, 对于  $0 < k < n$ , 有

$$f(k) = a + kd - aq^k > 0,$$

即

$$a + kd > aq^k.$$

于是,

$$\sum_{k=0}^n (a + kd) > \sum_{k=0}^n aq^k.$$



\* ) 原题要求证明“大于”，实际应为“大于或等于”。

1293. 用不等式

$$\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \geq 0,$$

其中  $x, a_k, b_k (k = 1, 2, \dots, n)$  为实数，来证明哥西 — 布尼雅柯夫斯基不等式

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

证 由于

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \\ &= \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) x^2 + 2 \left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right) x + \sum_{k=1}^n b_k^2 \geq 0, \end{aligned}$$

对任何  $x$  都成立，故上述二次式的判别式不能为正，即

$$4 \left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 - 4 \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \leq 0,$$

也即，

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

1294. 证明：正数的算术平均数不大于这些数的平方的平均数，即是

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

证 利用 1293 题的结果，设

$$a_k = x_k, b_k = \frac{1}{n},$$

则有

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2,$$

所以,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

1295. 证明:正数的几何平均数不大于这些数的算术平均数,即是

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

证 设  $G_n = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$ ,

$$A_n = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n),$$

则有

$$(G_n)^n = x_1 x_2 \cdots x_n, nA_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

当  $n = 2$  时,我们已有不等式

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

今假定  $n = k$  时,有

$$G_k \leq A_k,$$

我们来证  $n = k + 1$  时,有

$$G_{k+1} \leq A_{k+1}.$$

事实上,

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= (x_1 \cdot x_2 \cdots x_k \cdot x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \\ &= [(G_k)^k \cdot x_{k+1}]^{\frac{1}{k+1}} \\ &\leq (G_k)^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \\ &\leq (A_k)^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}. \end{aligned}$$

如果我们设

$$f(x) = x^a - (1 - a + ax),$$

$$\text{由 } f'(x) = a(x^{a-1} - 1) \begin{cases} > 0, \text{ 当 } 0 < x < 1; \\ 0, \text{ 当 } x = 1; \\ < 0, \text{ 当 } x > 1, \end{cases}$$

故知  $f(x)$  在  $(0, 1]$  上是严格递增的, 而在  $[1, \infty)$  上是严格递减的. 令  $a = \frac{1}{p}$ ,  $1 - a = \frac{1}{q}$ , 用  $\frac{a}{b}$  代替  $x$ , 于是就有下列不等式:

$$\text{当 } a > 0, b > 0, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ 时}$$

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

$$\text{今 } A_k = a, x_{k+1} = b, p = \frac{k+1}{k} > 1, q = k+1 > 1,$$

且

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{k+1} = 1,$$

所以,

$$(A_k)^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \leq \frac{k}{k+1} A_k + \frac{1}{k+1} x_{k+1}.$$

于是,

$$\begin{aligned} G_{k+1} &\leq \frac{k}{k+1} A_k + \frac{1}{k+1} x_{k+1} \\ &= \frac{1}{k+1} (k A_k + x_{k+1}) \\ &= \frac{1}{k+1} (x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}) = A_{k+1}. \end{aligned}$$

从而有

$$G_{k+1} \leq A_{k+1}.$$

按照数学归纳法得知不等式

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

对于任何的自然数  $n$  均成立.

1296. 设  $a$  及  $b$  为二正数, 则由下之等式

$$\begin{aligned} \text{若 } s \neq 0, \Delta_s(a, b) &= \left( \frac{a^s + b^s}{2} \right)^{\frac{1}{s}}, \\ \Delta_0(a, b) &= \lim_{s \rightarrow 0} \Delta_s(a, b) \end{aligned}$$

所定义之函数称为正数  $a$  及  $b$  之  $s$  阶平均数.

特别是, 当  $s = -1$  时得调和平均数, 当  $s = 0$  时得几何平均数(试证之!); 当  $s = 1$  时得算术平均数; 当  $s = 2$  时得平方平均数.

证明: (1)  $\min(a, b) \leq \Delta_s(a, b) \leq \max(a, b)$ ;

(2) 当  $a \neq b$  时, 函数  $\Delta_s(a, b)$  是变量  $s$  的增函数;

(3)  $\lim_{s \rightarrow -\infty} \Delta_s(a, b) = \min(a, b)$ ;

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \Delta_s(a, b) = \max(a, b).$$

证 先证当  $s = 0$  时得几何平均数, 由题设知

$$\Delta_0(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta_s(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} e^{\frac{1}{s} \ln \frac{a^s + b^s}{2}},$$

研究  $f(x) = \ln \frac{a^x + b^x}{2}$  在  $x = 0$  点的导数, 有

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \ln \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right) \right\}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} f'(0) &= f'(x) \Big|_{x=0} \\ &= \left[ \frac{2}{a^x + b^x} \cdot \frac{1}{2} (a^x \ln a + b^x \ln b) \right] \Big|_{x=0} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln a + \ln b).$$

因此求得

$$\Delta_0(a, b) = e^{f(0)} = e^{\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)} = \sqrt{ab},$$

此即几何平均数.

$$\begin{aligned} (1) \text{ 由于 } 2[\min(a, b)]^s &\leq a^s + b^s \\ &\leq 2[\max(a, b)]^s, \end{aligned}$$

所以,

$$\min(a, b) \leq \left( \frac{a^s + b^s}{2} \right)^{\frac{1}{s}} \leq \max(a, b),$$

即

$$\min(a, b) \leq \Delta_s(a, b) \leq \max(a, b).$$

$$(2) \text{ 考虑 } \ln \Delta_s(a, b) = \frac{1}{s} \ln \frac{a^s + b^s}{2}, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds} \ln \Delta_s(a, b) \\ &= -\frac{1}{s^2} \ln \frac{a^s + b^s}{2} + \frac{a^s \ln a + b^s \ln b}{s(a^s + b^s)} \\ &= \frac{1}{s^2(a^s + b^s)} \left[ (a^s \ln a^s + b^s \ln b^s) \right. \\ &\quad \left. - (a^s + b^s) \ln \frac{a^s + b^s}{2} \right]. \end{aligned}$$

由于  $a^s > 0, b^s > 0$ , 参看 1314 题(B) 的结果知

$$a^s \ln a^s + b^s \ln b^s > (a^s + b^s) \ln \frac{a^s + b^s}{2},$$

所以,  $\frac{d}{ds} \ln \Delta_s(a, b) > 0$ , 即  $\ln \Delta_s(a, b)$  是严格增函数, 由于对数函数的严格单调增加性, 故知函数  $\Delta_s(a, b)$  是变量  $s$  的严格增函数.

(3) 不妨设  $0 < a < b$ . 于是

$$\begin{aligned} &\leq |f(x+h)| + |f(x-h)| \\ &\quad + \frac{h^2}{2} [ |f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)| ] \\ &\leq 2M_0 + h^2 M_2, \end{aligned}$$

即

$$M_2 h^2 - 2|f'(x)|h + 2M_0 \geq 0.$$

由于此式对任何  $h$  都成立, 故此二次式的判别式必非正:

$$4|f'(x)|^2 - 4M_2(2M_0) \leq 0,$$

即

$$|f'(x)|^2 \leq 2M_0 M_2$$

由此可得

$$M_1^2 \leq 2M_0 M_2.$$

证完.

## § 8. 凹凸性, 拐点

**1° 凹的充分条件** 若曲线  $y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) 的一段, 位于其任意一点的切线之上(或之下), 则称这个可微分的函数  $y = f(x)$  的图形于闭区间  $[a, b]$  上是凹(或对应地, 凸)的. 在假设二阶导函数  $f''(x)$  存在的情况下, 当  $a < x < b$  时不等式

$$f''(x) > 0 \text{ [或对应地 } f''(x) < 0 \text{]}$$

成立, 为图形是凹(或对应地, 凸)的充分条件.

**2° 拐点的充分条件** 若函数的图形在某点的凹凸性改变, 则称此点为**拐点**.

若在点  $x_0$ , 或是  $f''(x_0) = 0$ , 或是  $f''(x_0)$  不存在, 且当  $x$  变动经过  $x_0$  时,  $f''(x)$  变号, 则  $x_0$  便是拐点.

1298. 研究曲线

$$y = 1 + \sqrt[3]{x}$$

于  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 2)$  及  $C(0, 0)$  诸点的凹凸性.

解  $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, y'' = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}.$

于  $A(-1, 0)$  点,  $y'' = \frac{2}{9} > 0$ , 故在该点附近曲线的图象是凹的;

于  $B(1, 2)$  点,  $y'' = -\frac{2}{9} < 0$ , 故在该点附近曲线的图形是凸的;

于  $C(0, 0)$  点附近,  $y''$  变号, 因此它是拐点. 在  $C$  点左边 ( $x < 0$ ),  $y'' > 0$ , 曲线是凹的; 在  $C$  点右边 ( $x > 0$ ),  $y'' < 0$ , 曲线是凸的. 注意, 当  $x = 0$  时,  $y''$  不存在.

求下列函数的图象的凹或凸的区域及拐点:

1299.  $y = 3x^2 - x^3.$

解  $y' = 6x - 3x^2, y'' = 6 - 6x.$

当  $-\infty < x < 1$  时,  $y'' > 0$ , 故图形是凹的;

当  $1 < x < +\infty$  时,  $y'' < 0$ , 故图形是凸的;

$x = 1$  为拐点.

1300.  $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2} (a > 0).$

解  $y' = -\frac{2a^3x}{(a^2 + x^2)^2}, y'' = -\frac{2a^3(a^2 - 3x^2)}{(a^2 + x^2)^3}.$

当  $|x| < \frac{a}{\sqrt{3}}$  时,  $y'' < 0$ , 故图形是凸的;

当  $|x| > \frac{a}{\sqrt{3}}$  时,  $y'' > 0$ , 故图形是凹的;

$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$  是拐点.

1301.  $y = x + x^{\frac{5}{3}}$

解  $y' = 1 + \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}, y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}.$

当  $-\infty < x < 0$  时,  $y'' < 0$ , 故图形是凸的;

当  $0 < x < +\infty$  时,  $y'' > 0$ , 故图形是凹的;

$x = 0$  是拐点(注意,  $x = 0$  时,  $y''$  不存在).

1302.  $y = \sqrt{1+x^2}.$

解  $y' = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}, y'' = x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} > 0$ , 图形始终呈凹状, 无拐点.

1303.  $y = x + \sin x.$

解  $y' = 1 + \cos x, y'' = -\sin x.$

当  $2k\pi < x < (2k+1)\pi$  时,  $y'' < 0$ , 故图形是凸的;

当  $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$  时,  $y'' > 0$ , 故图形是凹的;

$x = k\pi$  是拐点( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

1304.  $y = e^{-x^2}.$

解  $y' = -2xe^{-x^2}, y'' = e^{-x^2}(4x^2 - 2).$

当  $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$  时,  $y'' < 0$ , 故图形是凸的;

当  $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$  时,  $y'' > 0$ , 故图形是凹的;

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  是拐点.

1305.  $y = \ln(1+x^2).$



解  $y' = \frac{2x}{1+x^2}, y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$

当  $|x| < 1$  时,  $y'' > 0$ , 故图形是凹的;

当  $|x| > 1$  时,  $y'' < 0$ , 故图形是凸的;

$x = \pm 1$  是拐点.

1306.  $y = x \sin(\ln x) \ (x > 0).$

解  $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x),$

$$y'' = \frac{\sqrt{2}}{x} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right).$$

令  $y'' = 0$ , 得  $x = e^{k\pi + \frac{\pi}{4}} \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

当  $e^{2k\pi + \frac{3}{4}\pi} < x < e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}$  时,  $y'' > 0$ , 故图形是凹的;

当  $e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}} < x < e^{2k\pi + \frac{5}{4}\pi}$  时,  $y'' < 0$ , 故图形是凸的;

$x = e^{k\pi + \frac{\pi}{4}}$  是拐点  $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

1307.  $y = x^x \ (x > 0).$

解  $y' = x^x(\ln x + 1), y'' = x^x\left\{\frac{1}{x} + (1 + \ln x)^2\right\}.$

当  $x > 0$  时,  $y'' > 0$ , 故图形始终是凹的.

1308. 证明曲线

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

有位于同一直线上的三个拐点. 作出这个函数的图形.

证  $y' = \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2},$

$$y'' = \frac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}.$$

令  $y'' = 0$  得  $x_1 = -2 - \sqrt{3}, x_2 = -2 + \sqrt{3},$

$x_3 = 1$ , 对应的函数值为  $y_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{4},$

$$y_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}, y_3 = 1. \text{ 由于}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 + \sqrt{3} & -2 - \sqrt{3} \\ 1 & \frac{1 + \sqrt{3}}{4} & \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \end{vmatrix} = 0$$

所以拐点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  及  $C(x_3, y_3)$  在一条直线上(图 2.48).

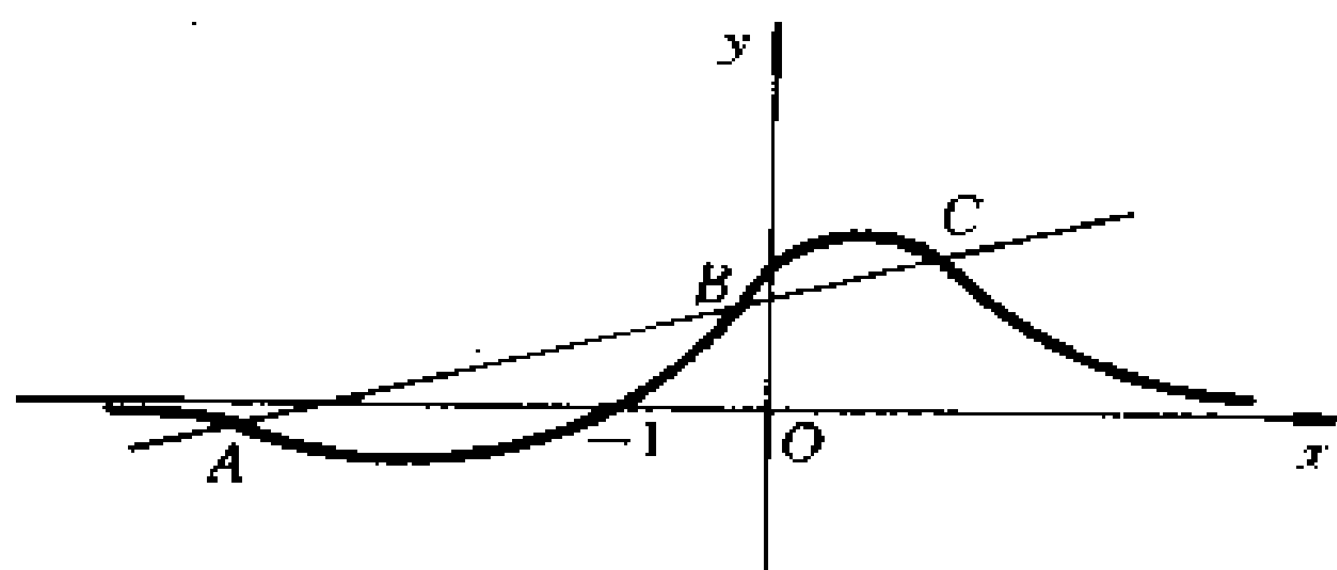


图 2.48

1309. 当如何选择参变数  $h$  时,“概率曲线”

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} (h > 0)$$

有拐点  $x = \pm \sigma$ ?

解  $y' = \frac{-2h^3 x}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2},$

$$y'' = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} (4h^4 x^2 - 2h^2).$$

$$\text{令 } y'' = 0, \text{ 得 } x^2 = \frac{1}{2h^2}.$$

由于拐点为  $x = \pm \sigma$ , 故有

$$h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}, \text{ 即 } h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} (\sigma > 0).$$

1310. 研究摆线(旋轮线)

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (a > 0)$$

的凹凸性。

解  $\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2},$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3}$$

$$= -\frac{\csc^2 \frac{t}{2}}{2a(1 - \cos t)} < 0$$

$$(2k\pi < t < 2(k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \dots),$$

故摆线始终呈凸状。

1311. 设函数  $f(x)$  于区间  $a \leq x < +\infty$  中可微分二次, 并且:

(1)  $f(a) = A > 0$ ; (2)  $f'(a) < 0$ ;

(3) 当  $x > a$ ,  $f''(x) \leq 0$ .

证明: 在区间  $(a, +\infty)$  内有而且仅有方程  $f(x) = 0$  之一实根。

证 由于  $f'(x)$  在  $a \leq x < +\infty$  上连续且当  $a < x < +\infty$  时  $f''(x) \leq 0$ , 故函数  $f'(x)$  在  $a \leq x < +\infty$  上是减小的, 于是当  $a \leq x < +\infty$  时, 必  $f'(x) \leq f'(a) < 0$ ; 由此又知函数  $f(x)$  在  $a \leq x < +\infty$  上是严格减小的, 因此在  $(a, +\infty)$  上至多有一点使  $f(x) = 0$ , 即在  $(a, +\infty)$  上方程  $f(x) = 0$  至多有一(实)根。

下面再证明必有点  $a < x_0 < +\infty$  存在, 使  $f(x_0) =$

0. 考虑函数  $F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$  ( $a \leq x < +\infty$ ), 则

$$F'(x) = f'(x) - f'(a), F''(x) = f''(x), \\ (a \leq x < +\infty).$$

于是当  $a < x < +\infty$  时  $F''(x) \leq 0$ , 从而  $F'(x)$  在  $a \leq x < +\infty$  上是减小的, 但  $F'(a) = 0$ , 故当  $a \leq x < +\infty$  时,  $F'(x) \leq F'(a) = 0$ ; 由此又知  $F(x)$  在  $a \leq x < +\infty$  上是减小的, 但  $F(a) = 0$ , 因此当  $a \leq x < +\infty$  时, 恒有  $F(x) \leq F(a) = 0$ .

令  $x^* = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ , 由于  $f(a) > 0, f'(a) < 0$ , 故  $x^* > a$ . 很明显

$$F(x^*) = f(x^*) - f(a) - f'(a) \left[ -\frac{f(a)}{f'(a)} \right] \\ = f(x^*).$$

但上面已证必  $F(x^*) \leq 0$ , 故  $f(x^*) \leq 0$ . 于是, 根据连续函数的中间值定理, 知必有  $a < x_0 \leq x^*$  存在, 使  $f(x_0) = 0$ . 证毕.

注 上述证明的思路在几何上是明显的. 函数  $F(x)$  代表曲线  $y = f(x)$  (它是凸的) 上的纵坐标与在点  $(a, f(a))$  处的切线  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$  上的纵坐标之差, 点  $x^* = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$  即是此切线与  $Ox$  轴的交点(图 2.49).

1312. 若对于区间  $(a, b)$  内的任意两点  $x_1$  与  $x_2$  及任意二数  $\lambda_1$  与  $\lambda_2$  ( $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ) 有不等式:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

(或对应地,相反的不等式  $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ ), 则称函数  $f(x)$  于区间  $(a, b)$  上是凹(凸)的.

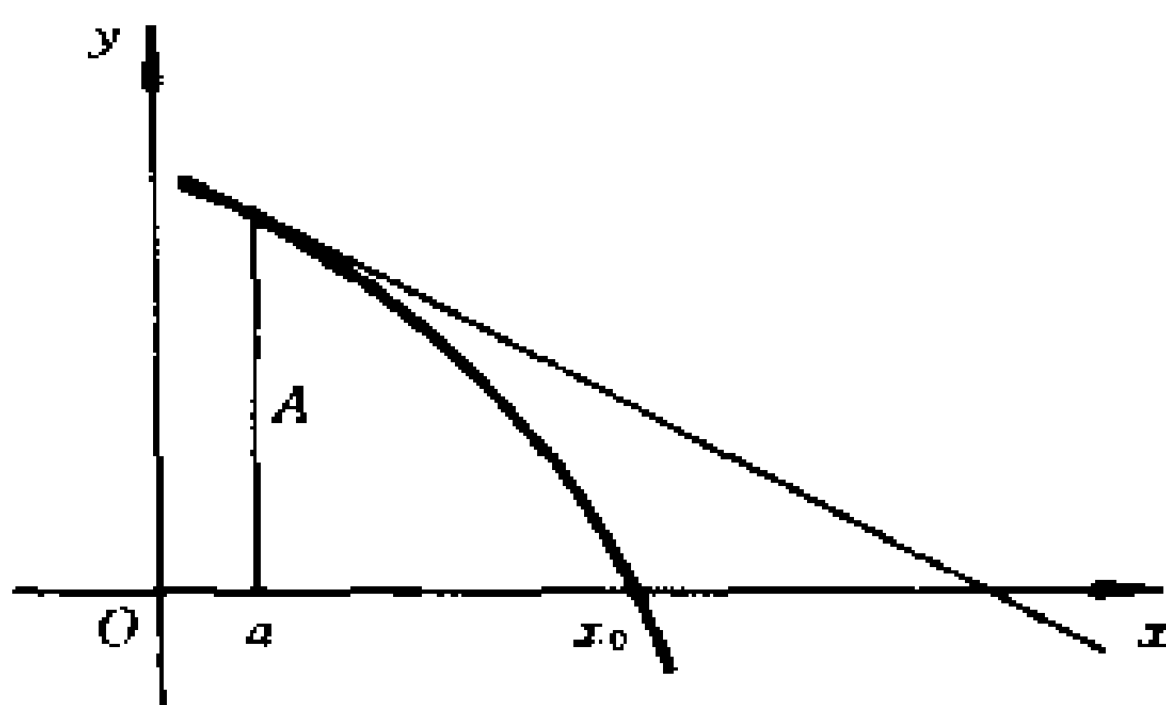


图 2.49

证明: 函数  $f(x)$  (1) 若当  $a <$

$x < b$  时,  $f''(x) > 0$ , 则于  $(a, b)$  上是凹的; (2) 若当  $a < x < b$  时,  $f''(x) < 0$ , 则于  $(a, b)$  上是凸的.

证 证法一:

设  $x_1, x_2$  为  $(a, b)$  中任意两点,  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . 不妨设  $x_1 < x_2$ . 于是  $a < x_1 < x_2 < b$ . 考虑  $0 \leq t \leq 1$  上的函数  $F(t) = f[(1-t)x_1 + tx_2] - (1-t)f(x_1) - tf(x_2)$ . 显然,

$$F(0) = f(x_1) - f(x_1) = 0,$$

$$F(1) = f(x_2) - f(x_2) = 0.$$

利用中值定理得知: 当  $0 \leq t \leq 1$  时,

$$\begin{aligned} F'(t) &= (x_2 - x_1)f'[(1-t)x_1 + tx_2] \\ &\quad - [f(x_2) - f(x_1)] \\ &= (x_2 - x_1)\{f'[(1-t)x_1 + tx_2] - f'(c)\}, \end{aligned}$$

其中  $x_1 < c < x_2$ . 令  $t_0 = \frac{c - x_1}{x_2 - x_1}$ , 则  $0 < t_0 < 1$  且  $c = (1 - t_0)x_1 + t_0x_2$ . 于是  $F'(t_0) = 0$ . 此外, 当  $0 \leq t \leq 1$  时, 有

$$F''(t) = (x_2 - x_1)^2 f''[(1-t)x_1 + tx_2].$$

(1) 若  $f''(x) > 0 (a < x < b)$ , 由上式知  $F''(t) > 0 (0 \leq t \leq 1)$ , 故  $F'(t)$  在  $0 \leq t \leq 1$  上是严格增大的, 再注意到  $F'(t_0) = 0$ , 即知: 当  $0 \leq t < t_0$  时  $F'(t) < 0$ ; 当  $t_0 < t \leq 1$  时,  $F'(t) > 0$ . 由此又知: 在  $0 \leq t \leq t_0$  上  $F(t)$  是严格减小的, 在  $t_0 \leq t \leq 1$  上  $F(t)$  是严格增大的; 由此, 再用  $F(0) = 0, F(1) = 0$ , 即知: 当  $0 < t < 1$  时, 恒有  $F(t) < 0$ . 特别  $F(\lambda_2) < 0$ . 但  $F(\lambda_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_1 f(x_1) - \lambda_2 f(x_2)$ , 故

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

由此可知  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是凹的.

(2) 若  $f''(x) < 0 (a < x < b)$ , 则  $F''(t) < 0 (0 \leq t \leq 1)$ . 和(1)情形完全类似地可推知: 当  $0 < t < 1$  时, 恒有  $F(t) > 0$ . 特别  $F(\lambda_2) > 0$ , 由此即知

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

故  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是凸的.

证法二:

在  $(a, b)$  内任取两点  $x_1$  及  $x_2$ , 使  $a < x_1 < x_2 < b$ , 并令  $t = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ , 则由  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$  知:  $x_1 < t < x_2$ .

将函数  $f(x)$  在  $x = t$  点按 1266 题题解附注的公式展开, 得

$$f(x) = f(t) + (x-t)f'(t) + \frac{1}{2}(x-t)^2 f''(\xi), \quad (1)$$

其中  $a < t < \xi < x$  或  $a < x < \xi < t$ . 将  $x = x_1$  及  $x = x_2$  代入(1)式, 得

所以,函数  $f(x)$  于区间  $(a, b)$  上是凸的.

1313. 证明:函数

$$x^n (n > 1), e^x, x \ln x$$

于区间  $(0, +\infty)$  上是凹的;而函数

$$x^n (0 < n < 1), \ln x,$$

于区间  $(0, +\infty)$  上是凸的.

证 (1) 设  $y = x^n (n > 1)$ , 则

$$y'' = n(n-1)x^{n-2}.$$

它在  $(0, +\infty)$  上是大于零的, 因此图形是凹的.

但当  $0 < n < 1$  时, 则  $y'' < 0$ , 故此时图形是凸的.

(2) 对于函数  $e^x$ , 其二阶导函数为  $e^x$ , 它始终为正, 因此图形是凹的.

(3) 对于函数  $x \ln x$ , 其二阶导函数为  $\frac{1}{x}$ , 它在  $(0, +\infty)$  内大于零, 因此图形是凹的.

(4) 对于函数  $\ln x$ , 其二阶导函数为  $-\frac{1}{x^2}$ , 它始终为负, 因此, 在  $(0, +\infty)$  内图形是凸的.

1314. 证明下列不等式, 并解释其几何意义:

$$(a) \frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n, (x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1);$$

$$(b) \frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} (x \neq y);$$

$$(c) x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2} \\ (x > 0, y > 0).$$

证 我们已知,若函数  $f(x)$  的图形在区间  $(a, b)$  内是凹的,则对于  $(a, b)$  中的任意两点  $x$  和  $y$  满足不等式

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f\left[\frac{x+y}{2}\right].$$

于是,利用 1313 题的结果,我们有,

(a) 设  $f(x) = x^n$ , ( $x > 0, n > 1$ ), 则其图形是凹的, 于是, 对于任意两点  $x$  和  $y$ , 得

$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left[\frac{x+y}{2}\right]^n.$$

(6) 设  $f(x) = e^x$ , 则在  $(-\infty, +\infty)$  上图形是凹的, 于是, 对于任意两点  $x$  和  $y$ , 得

$$\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$$

(b) 设  $f(x) = x \ln x$ , 则对于  $x > 0$  图形是凹的, 于是, 对于任意两点  $x$  和  $y$ , 得

$$x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}.$$

它们的几何意义是: 联接点  $(x, f(x))$  及  $(y, f(y))$  的弦的中点始终位于曲线上对应点(具相同横坐标)的上方.

1315. 证明有界的凸的函数处处连续, 并有左侧及右侧的导函数.

证 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内是凸的, 并设  $x_0$  为  $(a, b)$  内的任一点, 今证  $f(x)$  在点  $x_0$  连续, 且有左侧及右侧的导数.

在点  $x_0$  附近取一邻域  $|x - x_0| < \delta$ , 使得这邻域全部包含在  $(a, b)$  内, 并记



$$M = \min\{f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta)\}.$$

设  $0 < |x - x_0| < \delta$ , 记

$$t = \frac{|x - x_0|}{\delta},$$

则  $0 < t < 1$ .

当  $x_0 < x < x_0 + \delta$  时, 有

$$x = t(x_0 + \delta) + (1 - t)x_0$$

及

$$x_0 = \frac{1}{1+t}x + \frac{t}{1+t}(x_0 + \delta).$$

由于  $f(x)$  为凸函数, 故有

$$\begin{aligned} f(x) &> tf(x_0 + \delta) + (1 - t)f(x_0) \\ &\geq tM + (1 - t)f(x_0) \end{aligned} \quad (1)$$

及

$$\begin{aligned} f(x_0) &> \frac{1}{1+t}f(x) + \frac{t}{1+t}f(x_0 + \delta) \\ &\geq \frac{f(x) + tM}{1+t}. \end{aligned} \quad (2)$$

由(1), 得

$$f(x) - f(x_0) > -t[f(x_0) - M];$$

由(2), 得

$$t[f(x_0) - M] > f(x) - f(x_0).$$

从而  $f(x_0) - M > 0$ , 且

$$|f(x) - f(x_0)| < t[f(x_0) - M]$$

$$= \frac{[f(x_0) - M]}{\delta} \cdot |x - x_0|, \quad (3)$$

当  $x_0 - \delta < x < x_0$  时, 类似地也可导出(3)式, 故当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, (3) 式恒成立.

由此显然有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

这就证实了凸函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的连续性.

记  $x = x_0 + h$ , 则(3)式可改写为

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| \\ & < \frac{|f(x_0) - M|}{\delta} \quad (0 < |h| < \delta). \end{aligned} \quad (4)$$

引进函数

$$\varphi(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) \quad (-\delta < h < \delta).$$

容易验证  $\varphi(h)$  仍为凸函数, 且有  $\varphi(0) = 0$ . 今取任意两数  $t_1$  及  $t_2$ , 设有  $0 < t_1 < t_2 < \delta$ , 并改写为

$$t_1 = \frac{t_1}{t_2} \cdot t_2 + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) \cdot 0.$$

对于  $t_2$  与 0 两点可用凸函数性质, 有

$$\begin{aligned} \varphi(t_1) & \geq \frac{t_1}{t_2} \varphi(t_2) + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) \varphi(0) \\ & = \frac{t_1}{t_2} \varphi(t_2), \end{aligned}$$

即

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1} \geq \frac{\varphi(t_2)}{t_2},$$

这说明函数  $F(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$  是一个严格单调下降函数. 如

从  $h \rightarrow +0$  方向看, 则函数  $F(h)$  严格单调增大. 但由 (4) 可知  $|F(h)| < \frac{|f(x_0) - M|}{\delta}$ , 即  $F(h)$  在  $0 < |h| < \delta$  有界, 故极限  $\lim_{h \rightarrow +0} F(h)$  存在, 也即  $x_0$  的右侧导数

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$$

存在. 同理, 可证左侧导数  $f'_-(x_0)$  也存在.

以上讨论中, 对于区间是否有穷无关紧要. 证毕.

注 本题不需假定凸函数有界, 证明中也未用到有界这个条件, 参看 E. C. Titchmarsh, The Theory of Functions, § 5.31. 若以较弱的不等式  $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) >$

$\frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)$  ( $x_1 \neq x_2$ ) 作为凸函数的定义, 则需

加上凸函数有界这个条件, 才能推出它连续并且左、右导数都存在. 参看 G. Pólya, G. Szegő, Problems and Theorems in Analysis, Vol. I, 70 题和 124 题.

1316. 设函数  $f(x)$  于区间  $(a, b)$  内可微分二次, 且  $f''(\xi) \neq 0$ , 其中  $a < \xi < b$ . 证明: 在区间  $(a, b)$  中可找出两个值  $x_1$  与  $x_2$ , 满足

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

证 不妨设  $f''(\xi) > 0$ . 考察  $f'(\xi)$ , 分两种情形:

(1) 若  $f'(\xi) = 0$ , 则由  $f''(\xi) > 0$  知  $f(\xi)$  为极小值. 从而存在  $\delta > 0$ , 在  $[-\delta + \xi, \xi + \delta] (\subset (a, b))$  上函数  $f(x)$  在  $\xi$  的左侧单调下降, 在  $\xi$  的右侧单调上升. 如

果  $f(-\delta + \xi) = f(\xi + \delta)$ , 则取  $x_1 = -\delta + \xi, x_2 = \xi + \delta$ , 就满足了题中的等式. 如果  $f(-\delta + \xi) < f(\xi + \delta)$ , 则取  $x_1 = -\delta + \xi$ , 而在  $[\xi, \xi + \delta]$  上函数值  $f(x_1)$  介于  $f(\xi)$  与  $f(\xi + \delta)$  之间. 由于  $f(x)$  在  $[\xi, \xi + \delta]$  上单调上升, 故存在  $x_2 \in (\xi, \xi + \delta)$ , 使  $f(x_2) = f(x_1)$ , 从而题中的等式成立. 如果  $f(-\delta + \xi) > f(\xi + \delta)$ , 仿前也可取得两点  $x_1$  及  $x_2$ , 使  $f(x_1) = f(x_2)$ . 这时题中的等式得证.

(2) 若  $f'(\xi) \neq 0$ , 则设

$$F(x) = f(x) - f'(\xi)x,$$

从而有

$$F'(\xi) = f'(\xi) - f'(\xi) = 0,$$

且

$$F''(\xi) = f''(\xi) > 0.$$

对于函数  $F(x)$ , 应用上述(1)的推证方法, 总存在两点  $x_1$  及  $x_2$ , 使  $F(x_1) = F(x_2)$ , 也即有

$$f(x_1) - f'(\xi)x_1 = f(x_2) - f'(\xi)x_2,$$

解得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

从而命题得证.

1317. 证明: 若函数  $f(x)$  在无穷的区间  $(x_0, +\infty)$  内可微分两次, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

则在区间  $(x_0, +\infty)$  内至少有一点  $\xi$ , 满足

$$f''(\xi) = 0.$$

**证** 用反证法,即若不存在 $\xi$ ,使 $f''(\xi) = 0$ ,则当 $x > x_0$ 时,或者 $f''(x) > 0$ ,或者 $f''(x) < 0$ ,如果不是这样,即若存在点 $a$ 与 $b$ ,使得 $f''(a) < 0$ 及 $f''(b) > 0$ ,则由达布定理\*)可知,在 $a$ 与 $b$ 之间必有 $c$ 存在,使得 $f''(c) = 0$ ,这与我们的反证假设矛盾.因此我们不妨设 $f''(x) > 0$ ,从而函数 $f(x)$ 的图象是凹的,位于其任一点曲线的切线的上方.

再由

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

与 $f(x)$ 的可微性,利用1237题的结果,即知:在 $(x_0, +\infty)$ 中至少存在一点 $c_1$ ,使

$$f'(c_1) = 0.$$

由 $f''(x) > 0$ 易知 $f'(x)$ 单调上升,从而当 $x > c_1$ 时, $f'(x) > 0$ .取 $c_2 > c_1$ ,则 $f'(c_2) > 0$ .

过点 $(c_2, f(c_2))$ 作曲线 $y = f(x)$ 的切线,其方程为

$$Y(x) = f(c_2) + f'(c_2)(x - c_2).$$

易知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Y(x) = +\infty,$$

而 $f(x) - Y(x) > 0$ ,从而应有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

这与原设条件 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 矛盾.同样,对于 $f''(x) < 0$ 的情况也可推得以上结论.

于是,在区间 $(x_0, +\infty)$ 内至少有一点 $\xi$ ,使

$$f''(\xi) = 0.$$

\* ) 达布定理指:若函数 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 内有有限的导

函数,且  $g'(a)g'(b) < 0$ ,则在  $(a,b)$  内至少有一点  $c$ ,使

$$g'(c) = 0.$$

其证法是:不妨设  $g'(a) < 0, g'(b) > 0$ ,则在  $a$  右边且与  $a$  充分近的点  $x$ ,有  $g(a) > g(x)$ ;在  $b$  左边且与  $b$  充分近的点  $x$ ,有  $g(x) < g(b)$ ;由此可知  $g(x)$  在  $[a,b]$  上的最小值必在  $(a,b)$  内某点  $c$  达到,从而必有  $g'(c) = 0$ .

在本题中,可设  $g(x) = f'(x)$ ,则由  $g'(a) = f''(a) < 0$  及  $g'(b) = f''(b) > 0$  可知在  $a$  与  $b$  之间必有  $c$  存在,使  $g'(c) = 0$ ,即  $f''(c) = 0$ .

## § 9. 未定形的求值法

洛比塔第一法则(未定形  $\frac{0}{0}$  的求值法) 若(1) 函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $a$  点的某邻域  $U, *$  内有定义并且是连续的(此处  $a$  为数字或符号  $\infty$ ),并且当  $x \rightarrow a$  时,这两个函数都趋近于零:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0;$$

(2) 在  $a$  点的邻域  $U, *$  内,除  $a$  点而外,在其余各点导函数  $f'(x)$  与  $g'(x)$  都存在,并且当  $x \neq a$  时,二者不同时为零;(3) 有限或无穷的极限值  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在,则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

---

\* 所谓  $a$  点的邻域  $U, *$  系指适合于不等式

(1)  $|x - a| < \epsilon$ , 若  $a$  为一个数

及

(2)  $|x| > \frac{1}{\epsilon}$ , 若  $a$  为符号  $\infty$ ,  $x$  的集合.

**洛比塔第二法则**(不定形 $\frac{\infty}{\infty}$ 的求值法)若:(1)当 $x \rightarrow a$ 时,函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 二者都趋于无穷大;

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty,$$

其中 $a$ 为有限数或符号 $\infty$ ;

(2)对于属于 $a$ 点的邻域 $U$ ,而异于 $a$ 的一切 $x$ 值,导函数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在,并且当 $x \in U$ 及 $x \neq a$ 时,

$$f'(x) + g'(x) \neq 0.$$

(3)有限或无穷的极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在,则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

利用代数变形与取对数的方法,可使未定形 $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0$ 等的求值法化为前面两个类型的未定形;

$$\frac{0}{0} \text{ 与 } \frac{\infty}{\infty}$$

的求值法.

求出下列各式之值:

$$1318. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} = \frac{a}{b} (b \neq 0).$$

$$1319. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x + \sin x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x + \cos x}{2} = 1. \end{aligned}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 2 \frac{x}{\operatorname{tg} x} + \left( \frac{x}{\operatorname{tg} x} \right)^2} = - \frac{1}{3}.$$

1324.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{3} \frac{\sec^2 x}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}}{4\sin x \cos x} = \frac{1}{3}.$$

$$1325. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1 + xe^x - 2e^x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x + xe^x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x + e^x + xe^x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$1326. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t \sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\sin t + t \cos t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{t}{\sin t} \cos t} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$1327. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} 2x - 2 \operatorname{arcsin} x}{x^3}$$



$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left[ \frac{4x}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \right]}{6x}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{4}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = 1.$$

$$1328. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sqrt{x}} \left( \sqrt{a} \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arctan \sqrt{\frac{x}{b}} \right).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sqrt{x}} \left( \sqrt{a} \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arctan \sqrt{\frac{x}{b}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{a}}{1+\frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{b}}{1+\frac{x}{b}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{b}\sqrt{x}}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{x+a} - \frac{b}{x+b}}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{a}{(x+a)^2} + \frac{b}{(x+b)^2}}{3}$$

$$= \frac{a-b}{3ab} (ab \neq 0).$$

$$1329. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - \cos x \cdot a^{\sin x}) \ln a}{3x^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ln a}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a + \sin x \cdot a^{\sin x} - \cos^2 x \cdot a^{\sin x} \ln a}{2x} \\
&= \frac{\ln a}{6} \lim_{x \rightarrow 0} (a^x \ln^2 a + \cos x \cdot a^{\sin x} + \sin x \cos x \cdot a^{\sin x} \ln a \\
&\quad + \sin 2x \cdot a^{\sin x} \ln a - \cos^3 x \cdot a^{\sin x} \ln^2 a) \\
&= \frac{\ln a}{6} (a > 0).
\end{aligned}$$

1330.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right).$

解  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1)^2 + x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = -2.$$

1331.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin bx \cos ax}{b \sin ax \cos bx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}^{*}) = 1.$

\* ) 利用 1318 题的结果.

1332.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \operatorname{tg} ax}{b \operatorname{tg} bx}$

$$= \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sec^2 ax}{b \sec^2 bx} = \left( \frac{a}{b} \right)^2 (b \neq 0).$$

$$1333. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x \cdot \sin(\sin x) + \sin x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin(\sin x) - \cos^2 x \cos(\sin x) + \cos x}{12x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{24x} \left[ \cos x \sin(\sin x) + \frac{1}{2} \sin 2x \cos(\sin x) \right. \\ &\quad \left. + \sin 2x \cos(\sin x) + \cos^3 x \sin(\sin x) - \sin x \right] \\ &= \frac{1}{24} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ -\sin x \sin(\sin x) + \cos^2 x \cos(\sin x) \right. \\ &\quad \left. + 3 \cos 2x \cos(\sin x) - \frac{3}{2} \cos x \sin 2x \sin(\sin x) \right. \\ &\quad \left. - 3 \cos^2 x \sin x \sin(\sin x) + \cos^4 x \cos(\sin x) - \cos x \right] \\ &= \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

$$1334. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{\operatorname{th}^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \operatorname{sh}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 2x - \sin 2x}{\sin 2x \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh} 2x \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 2x - \cos 2x}{\cos 2x \operatorname{sh}^2 x + \sin 2x \operatorname{sh} 2x + \operatorname{ch} 2x \sin^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\operatorname{sh}2x + 2\sin2x}{-2\sin2x\operatorname{sh}^2x + 3\cos2x\operatorname{sh}2x + 3\sin2x\operatorname{ch}2x + 2\operatorname{sh}2x\sin^2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} (4\operatorname{ch}2x + 4\cos2x)(-4\cos2x\operatorname{sh}^2x \\
&\quad - 2\sin2x\operatorname{sh}2x - 6\sin2x\operatorname{sh}2x + 6\cos2x\operatorname{ch}2x \\
&\quad + 6\cos2x\operatorname{ch}2x + 6\sin2x\operatorname{sh}2x + 4\operatorname{ch}2x\sin^2x \\
&\quad + 2\sin2x\operatorname{sh}2x)^{-1} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

$$1335. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ar sh}(\operatorname{sh}x) - \operatorname{ar sh}(\sin x)}{\operatorname{sh}x - \sin x},$$

其中  $\operatorname{ar sh}x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .

$$\begin{aligned}
&\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ar sh}(\operatorname{sh}x) - \operatorname{ar sh}(\sin x)}{\operatorname{sh}x - \sin x}, \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{sh}x + \operatorname{ch}x) - \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})}{\operatorname{sh}x - \sin x}, \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{ch}x + \operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}x + \operatorname{ch}x} - \frac{\cos x + \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}}}{\operatorname{ch}x - \cos x}, \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{\operatorname{ch}x - \cos x} \\
&\quad - \left( \frac{-\sin x \sqrt{1 + \sin^2 x} - \frac{\cos^2 x \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{1 + \sin^2 x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\quad}{\operatorname{sh}x + \sin x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2\sin x}{(1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}}{\operatorname{sh} x + \sin x} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{(1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\sin^2 x \cos x}{(1 + \sin^2 x)^{\frac{5}{2}}}}{\operatorname{ch} x + \cos x} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

1336.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\epsilon} (\epsilon < 0).$

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\epsilon} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\epsilon x^{\epsilon-1}} = 0.$

1337.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} (a > 0, n > 0).$

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{ae^{ax}} = \cdots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^n e^{ax}} = 0.$

以上是就  $n$  为正整数的情形解得的. 若  $n$  不是正整数, 则

$$[n] < n < [n] + 1.$$

于是,

$$\frac{x^{[n]}}{e^{ax}} < \frac{x^n}{e^{ax}} < \frac{x^{[n]+1}}{e^{ax}} (x > 1).$$

而左右两端当  $x \rightarrow +\infty$  时, 上面已证明它们的极限为零. 因此, 中间的极限也为零. 于是, 对于任意大于零的实数  $a$  和  $n$ , 均有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = 0.$$

$$1338. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \lim_{\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{50} \quad * )}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0.$$

\* ) 利用 1337 题的结果.

$$1339. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0.01x}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0.01x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{0.01x}} = 0. \quad * )$$

\* ) 利用 1337 题的结果.

$$1340. \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{x \ln^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x \ln^2 x}{1-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln^2 x + 2 \ln x}{-1} = 0.$$

$$1341. \lim_{x \rightarrow +0} x^\epsilon \ln x \quad (\epsilon > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +0} x^\epsilon \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-\epsilon}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\epsilon x^{-\epsilon-1}}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^\epsilon}{\epsilon} = 0.$$

$$1342. \lim_{x \rightarrow +0} x^x.$$

解  $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x} = e^0 \quad (*) = 1.$

\* ) 利用 1341 题的结果.

1343.  $\lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x - 1}.$

解  $\lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{(x^x - 1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{(e^{x \ln x} - 1) \ln x}.$

由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = 0 \quad (*), \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} = 1$$

及

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} (x \ln^2 x) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{2}{x} \ln x}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} (-2x \ln x) = 0, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow +0} \{ (e^{x \ln x} - 1) \ln x \} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \left\{ \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \cdot x \ln^2 x \right\} = 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{(e^{x \ln x} - 1) \ln x} = e^0 = 1.$$

\* ) 利用 1341 题的结果.

1344.  $\lim_{x \rightarrow +0} (x^{x^x} - 1).$

**解**  $\lim_{x \rightarrow +0} (x^{x^x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +0} (e^{x^x \ln x} - 1).$

利用 1342 题的结果,有

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1,$$

故得

$$\lim_{x \rightarrow +0} e^{x^x \ln x} = 0,$$

从而有

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x^{x^x} - 1) = -1.$$

1345.  $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{k}{1+\ln x}}.$

**解** 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{k}{1+\ln x} \ln x = k \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = k,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{k}{1+\ln x}} = e^k.$$

1346.  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$

**解** 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}.$$



所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} = e^0 = 1.$$

1350.  $\lim_{x \rightarrow +0} \left( \ln \frac{1}{x} \right)^x.$

**解** 由于  $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln \left( \ln \frac{1}{x} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln y)}{y}$   
 $= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y \ln y} = 0,$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left( \ln \frac{1}{x} \right)^x = e^0 = 1.$$

1351.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}.$

**解** 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{(1+2x)^2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \cdot \cos^2 \frac{\pi x}{2x+1}} \\ &= 2\pi \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(1+2x)^2}}{\sin \frac{2\pi x}{2x+1}} \\ &= 2\pi \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{4}{(1+2x)^3}}{\frac{2\pi}{(1+2x)^2} \cos \frac{2\pi x}{2x+1}} \\ &= -4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+2x) \cos \frac{2\pi x}{2x+1}} \end{aligned}$$

$$= 0,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

$$1352. \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} \right)^{\operatorname{tg}(x-a)},$$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg}(x-a) \ln \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} \right) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \operatorname{tg} x - \ln \operatorname{tg} a}{\operatorname{tg}(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \sec^2 x}{\sec^2(x-a)} = \frac{2}{\sin 2a}, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} \right)^{\operatorname{tg}(x-a)} = e^{\frac{2}{\sin 2a}} (a \neq \frac{k\pi}{2}, k \text{ 为整数}).$$

$$1353. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a^x - x \ln a) - \ln(b^x - x \ln b)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(a^x - 1) \ln a}{a^x - x \ln a} - \frac{(b^x - 1) \ln b}{b^x - x \ln b}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left\{ \frac{a^x \ln^2 a (a^x - x \ln a) - (a^x - 1)^2 \ln^2 a}{(a^x - x \ln a)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{b^x \ln^2 b (b^x - x \ln b) - (b^x - 1)^2 \ln^2 b}{(b^x - x \ln b)^2} \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (\ln^2 a - \ln^2 b),$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\ln^2 a - \ln^2 b}{2}}.$$

$$1354. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x(x + 2)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$1355. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \ln x - 1}{(x - 1)\ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{x - 1}{x} + \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1) + x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + 1 + \ln x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$1356. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = 0. \end{aligned}$$

$$1357. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})} - \frac{1}{\ln(1 + x)} \right).$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x) \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{1+x} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ln(1+x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1 - x}{\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + (1+x) \ln(1+x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1}{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1 + \ln(1+x)} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$1358. \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \quad (a > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (a^x \ln a - a x^{a-1}) = a^a (\ln a - 1).$$

$$1359. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[ \frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{x^2} \ln(1+x) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \\
&= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}}{2x} \\
&= -e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)^2} = -\frac{e}{2}.
\end{aligned}$$

1360.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} (a > 0).$

解 
$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x \left[ \ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right] - a^x \ln a}{2x} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (a+x)^x \left[ \ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + (a+x)^x \left[ \frac{1}{a+x} + \frac{a}{(a+x)^2} \right] - a^x \ln^2 a \right\} \\
&= \frac{1}{a}.
\end{aligned}$$

1361.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x.$

解 由于

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( \frac{2}{\pi} \arctan x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left( \frac{2}{\pi} \arctan x \right)}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2 \arctan x} \cdot \frac{2}{\pi(1+x^2)}}{-\frac{1}{x^2}}
\end{aligned}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} = -\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right)^x = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

1362.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^x,$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(\operatorname{th} x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\operatorname{th} x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\operatorname{th} x \operatorname{ch}^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\operatorname{sh} 2x} = -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2 \operatorname{ch} 2x} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 \operatorname{sh} 2x} = 0. \end{aligned}$$

所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^x = e^0 = 1.$

1363.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{arc} \sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{arc} \sin x) - \ln x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\operatorname{arc} \sin x \sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \sin x}{2x^2 \sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arc} \sin x}{\left( 4x \sqrt{1-x^2} - \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}} \right) \operatorname{arc} \sin x + 2x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{2(2-3x^2)\arcsin x + 2x\sqrt{1-x^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-12x\arcsin x + \frac{2(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + 2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}} \\
&= \frac{1}{6},
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{6}}.$$

1364.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}.$

解 由于

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

1365.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}.$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( \frac{2}{\pi} \arccos x \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2} \arccos x} = -\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

1366.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\operatorname{ch} x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 由

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x - \ln \operatorname{ch} x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{tg} x - \operatorname{th} x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sec^2 x - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}{2} = -1, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\operatorname{ch} x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-1}.$$

1367.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[n]{\operatorname{ch} x}}.$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[n]{\operatorname{ch} x}}.$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{sh} x \left( \frac{1}{m} (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{m}-1} - \frac{1}{n} (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{n}-1} \right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} = \frac{mn}{n-m} \quad (n \neq m),$$

于是



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[n]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[m]{\operatorname{ch} x}} = \frac{mn}{n-m}.$$

1368.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+e^x}{2} \right)^{\operatorname{cth} x}.$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+e^x) - \ln 2}{\operatorname{th} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}} = \frac{1}{2},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+e^x}{2} \right)^{\operatorname{cth} x} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

1369.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \frac{\ln(e^x + x)}{x} \right).$$

解 当  $x \rightarrow +\infty$  时, 有

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} &= x \left[ 1 + \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= x \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) + o \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right] \\ &= x + \frac{1}{3} + o \left( \frac{1}{x} \right) + o(1) = x + \frac{1}{3} + o(1), \\ \sqrt{x^2 + x + 1} &= x \left[ 1 + \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= x \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) + o \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right] \\ &= x + \frac{1}{2} + o \left( \frac{1}{x} \right) + o(1) = x + \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

并注意  $x^{\frac{1}{x}} \rightarrow 1$ , 于是得

$$\begin{aligned}
 (x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} &= (x+a)(x+a)^{\frac{1}{x}} - x \cdot x^{\frac{1}{x+a}} \\
 &= (x+a) \cdot x^{\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{x}} - x \cdot x^{\frac{1}{x}} x^{\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x}} \\
 &= x^{\frac{1}{x}} \left\{ (x+a) \left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] - x \left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] \right\} \\
 &= x^{\frac{1}{x}} \{ [x+a+o(1)] - [x+o(1)] \} \\
 &= x^{\frac{1}{x}} [a+o(1)],
 \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \{ x^{\frac{1}{x}} [a+o(1)] \} = a.
 \end{aligned}$$

1371. 若当  $x \rightarrow 0$  时, 曲线  $y = f(x)$  通过坐标原点  $(0, 0)$  [ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ ], 且在此有斜角  $\alpha$ , 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x}.$$

解  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = \operatorname{tg} \alpha^{*})$ .

\* ) 所谓有斜角  $\alpha$  是指在  $x = 0$  点有  $f'(0) = \operatorname{tg} \alpha$ , 注意到当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) \rightarrow 0$ , 以及  $f'(0)$  存在, 如果再假定  $f'(x)$  在  $x = 0$  连续, 则也可用洛比塔法则求得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'}{1} = f'(0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

1372. 若当  $x \rightarrow +0$  时, 曲线  $y = f(x)$  通过坐标原点  $(0,$

0)  $[\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0]$ , 并且当  $0 < x < \varepsilon$  时, 此曲线完全是在两直线  $y = -kx$  及  $y = kx (k \neq \infty)$  所组成的锐角之内, 证明

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{f(x)} = 1.$$

证 当  $x \rightarrow +0$  时, 有  $x \ln x \rightarrow 0$ . 按题设应有

$$-kx \leq f(x) \leq kx \quad (k > 0, 0 < x < \varepsilon),$$

而当  $x > 0$  且很小时, 有  $\ln x < 0$ , 故

$$kx \ln x < f(x) \ln x < -kx \ln x,$$

从而有

$$e^{kx \ln x} < e^{f(x) \ln x} < e^{-kx \ln x}.$$

当  $x \rightarrow +0$  时, 不等式两端均趋于  $e^0 = 1$ , 注意到  $e^{f(x) \ln x} = x^{f(x)}$ , 即有

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{f(x)} = 1.$$

1373. 证明: 若函数  $f(x)$  的二阶导函数  $f''(x)$  存在, 则

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

证 当  $h \rightarrow 0$  时,  $f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \rightarrow 0$  及  $h^2 \rightarrow 0$ , 且分子、分母(视为  $h$  的函数)都有导数, 又注意到分母的导数  $2h \neq 0 (h \rightarrow 0 \text{ 但 } h \neq 0)$ , 故对  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$  可用洛比塔法则, 并

且继续运算,最后得证

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} \right] \\
 &= \frac{1}{2} [f''(x) + f''(x)] = f''(x).
 \end{aligned}$$

1374. 研究运用洛比塔法则于下列各例的可能性:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}; \quad \text{(6)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}; \\
 & \text{(B)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}(\cos x + 2\sin x) + e^{-x^2} \sin^2 x}{e^{-x}(\cos x + \sin x)}; \\
 & \text{(r)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x + \sin x \cos x}{(x + \sin x \cos x)e^{\sin x}}.
 \end{aligned}$$

解 (a) 分子、分母分别求导数,得商为

$$\frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x},$$

此函数当  $x \rightarrow 0$  时,极限不存在,因此洛比塔法则不能适用.但是,原极限是存在的.事实上,函数

$$\frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x},$$

当  $x \rightarrow 0$  时,  $\frac{x}{\sin x} \rightarrow 1$  及  $x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$ , 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0.$$

(6) 分子、分母分别求导数,得商为

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x},$$

当  $x \rightarrow \infty$  时,上述函数的极限不存在,因此洛比塔法则不能适用.但是,原极限是存在的,事实上,有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1.$$

(B) 如果运用洛比塔法则,就有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}(\cos x + 2\sin x) + e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x + \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5e^{-2x}\sin x - 2xe^{-x^2}\sin^2 x + e^{-x^2}\sin 2x}{-2e^{-x}\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5}{2}e^{-x} + xe^{-x^2+x}\sin x - e^{-x^2+x}\cos x \right) = 0. \end{aligned}$$

这个结果是错误的.事实上,若取  $x_n = n\pi + \frac{3\pi}{4}$ , 则

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . 对于数列  $\{x_n\}$ , 原式的分母  $e^{-x_n} \cdot (\cos x_n$

$$+ \sin x_n) = \sqrt{2}e^{-x_n}\sin\left(x_n + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{-(n\pi + \frac{3\pi}{4})} \cdot$$

$\sin(n+1)\pi = 0$ , 而分子不为零, 此时原式的极限不存在, 从而对于  $x \rightarrow +\infty$ , 原式的极限不存在. 原因是在求

极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  时, 虽然  $f(x)$  及  $g(x)$  均连续且极限为

零,但其导函数在点列  $x^{(n)} = n\pi (n = 1, 2, \dots)$  上两者同时出现了零点. 因此,一方面本题不符合运用洛比塔法则的条件;另一方面也不允许在求极限过程中,用  $\sin x$  作除数,上、下同时约分后再求极限.

(r) 如果运用洛比塔法则,就有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x+\sin x \cos x}{(x+\sin x \cos x)e^{\sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\cos 2x}{e^{\sin x} [1+\cos 2x+\cos x \cdot (x+\sin x \cos x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cos^2 x}{e^{\sin x} [2\cos^2 x+\cos x \cdot (x+\sin x \cos x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\sin x} \left[ 1 + \frac{1}{2\cos x} (x+\sin x \cos x) \right]}. \end{aligned}$$

由于

$$e^{\sin x} \geq e^{-1}, x+\sin x \cos x \geq x-1,$$

故当  $x > 1$  时,有

$$\begin{aligned} & \left| e^{\sin x} \left[ 1 + \frac{1}{2\cos x} (x+\sin x \cos x) \right] \right| \\ & \geq e^{-1} \left[ \frac{1}{2|\cos x|} (x-1) - 1 \right] \\ & \geq e^{-1} \left[ \frac{1}{2} (x-1) - 1 \right] \rightarrow +\infty \text{ (当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时)}, \end{aligned}$$

从而得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x+\sin x \cos x}{(x+\sin x \cos x)e^{\sin x}} = 0.$$

这个结果是错误的. 事实上, 对于不同的叙列:

$$x'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 及 } x''_n = 2n\pi (n = 1, 2, \dots),$$

让  $n \rightarrow +\infty$ , 则分别取不同的极限  $\frac{1}{e}$  及 1, 从而原极限是不存在的. 原因与 (B) 的情况类似, 只是注意到  $\cos x$  在  $x^{(n)} = n\pi + \frac{\pi}{2}$  的点列上 ( $n = 1, 2, \dots$ ) 取值为零. 因此, 本题不符合运用洛比塔法则的条件; 当然也不允许在中间过程里, 用  $\cos x$  作除数, 上、下约分后再求极限.

1375. 设有一弓形, 其弦为  $b$ , 矢为  $h$ , 又有内接于此弓形之内的等腰三角形, 若当  $R$  不变时弓形的弧趋于零, 求弓形面积与内接等腰三角形面积之比. 利用所得之结果推出计算弓形面积之近似公式:

$$S \approx \frac{2}{3}bh.$$

解 如图 2.50 所示.

$AB = b, DC = h,$

$\angle AOB = \alpha, \triangle ABC$  为

内接等腰三角形, 其面

积为

$$\frac{1}{2}bh = R^2 \left( \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha \right).$$

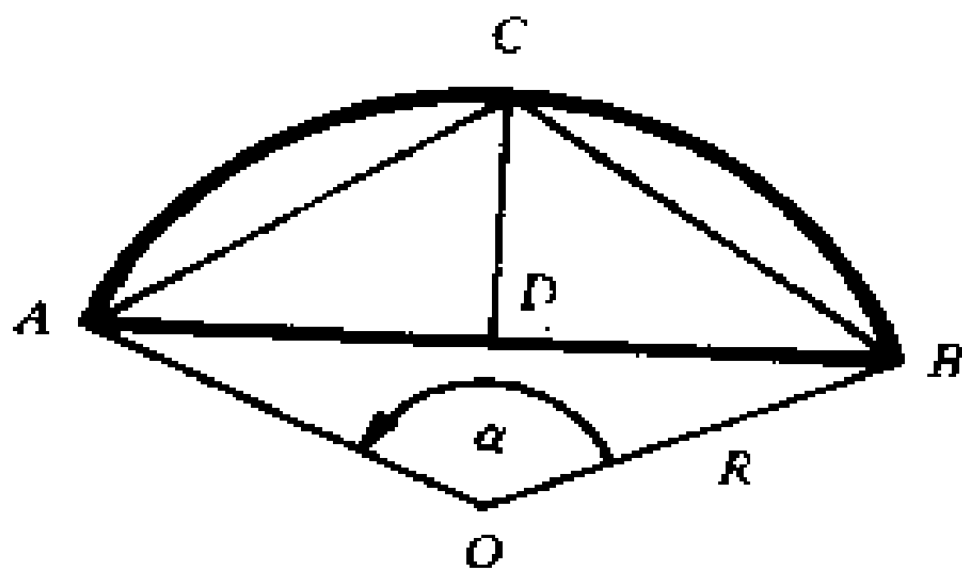


图 2.50

弓形面积为  $\frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$

当弧长趋于零时,  $\alpha$  趋于零, 于是, 弓形面积与内接等腰三角形面积之比为

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)}{R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sin\alpha\right)} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)}{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\right)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\frac{3\alpha}{4} \cdot \frac{\alpha}{4}} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

由此得弓形面积的近似公式为

$$S \approx \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}bh = \frac{2}{3}bh.$$

## § 10. 台劳公式

1° 台劳局部公式 若(1) 函数  $f(x)$  在  $x_0$  点的某邻域  $|x - x_0| < \epsilon$  内有定义; (2) 于此邻域内有一直到  $(n-1)$  阶的导函数  $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ ; (3)  $n$  级导函数  $f^{(n)}(x_0)$  于  $x_0$  点存在, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o(|x - x_0|^n), \quad (1)$$

其中  $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (k = 0, 1, \dots, n).$



特例, 当  $x_0 = 0$  时, 有:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(|x|^n). \quad (2)$$

在所示的条件下, (1) 式是唯一的.

从台劳局部公式(2), 得出下列五个重要的展开式:

$$\text{I. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\text{II. } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$$

$$\text{III. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\text{IV. } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n);$$

$$\text{V. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

**2° 台劳公式** 若函数  $f(x)$  (1) 在闭区间  $[a, b]$  上有定义; (2) 在此闭区间上有连续的导函数  $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ ; (3) 当  $a < x < b$  时, 有有限值的导函数  $f^{(n)}(x)$ , 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}[a + \theta(x-a)]}{n!} (x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

(拉格朗日余项公式), 或

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a + \theta_1(x-a))}{(n-1)!} (1-\theta_1)^{n-1} (x-a)^n$$

$$(0 < \theta_1 < 1)$$

(哥西余项公式).

1376. 将多项式

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$$

表成二项式  $x + 1$  的正整数乘幂多项式.

$$\text{解} \quad P'(x) = 3 + 10x - 6x^2, \quad P'(-1) = -13.$$

$$P''(x) = 10 - 12x, \quad P''(-1) = 22.$$

$$P'''(x) = -12, \quad P'''(-1) = -12.$$

$$P^{(4)}(x) = 0, \quad P^{(4)}(-1) = 0.$$

按台劳公式有

$$\begin{aligned} P(x) &= P(-1) + \frac{P'(-1)}{1!}(x+1) \\ &+ \frac{P''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \\ &R_4(x), \end{aligned}$$

这里  $R_4(x) = 0$ , 即展开式中的余项为零, 将上述结果代入, 即得

$$P(x) = 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$$

按变数  $x$  的正整数乘幂, 写出下列函数的展开式至含有指出阶数的项:

$$1377. \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} \text{ 到含 } x^4 \text{ 的项. } f^{(4)}(0) \text{ 等于甚么?}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} &= (1+x+x^2) \frac{(1+x)}{1+x^3} \\ &= (1+x)(1+x+x^2) \cdot [1-x^3+o(x^6)] \end{aligned}$$

于是

$$\sqrt[m]{a^m + x} = a + \frac{x}{ma^{m-1}} + \frac{(1-m)x^2}{2m^2a^{2m-1}} + o(x^2).$$

1380.  $\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$  到含  $x^3$  的项.

解 设  $f(x) = \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$ , 则

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{1}{3}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}},$$

$$f''(x) = 3x(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{1}{4}(3x^2-2)^2(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$- \frac{2}{3}(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{9}(2x-3)^2(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}},$$

$$f'''(x) = 3(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$- \frac{3}{2}x(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{5}{2}}$$

$$+ \frac{3}{8}(3x^2-2)^3(1-2x+x^3)^{-\frac{5}{2}}$$

$$- 3x(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$+ \frac{4}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}}$$

$$+ \frac{8}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}}$$

$$- \frac{10}{27}(2x-3)^3(1-3x+x^2)^{-\frac{8}{3}},$$

从而

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = \frac{1}{3}, f'''(0) = 6,$$

于是,

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} \\ &= \frac{1}{6}x^2 + x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

1381.  $e^{2x-x^2}$  到含  $x^5$  的项.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad e^{2x-x^2} &= 1 + (2x - x^2) \\ &+ \frac{(2x - x^2)^2}{2!} + \frac{(2x - x^2)^3}{3!} + \frac{(2x - x^2)^4}{4!} \\ &+ \frac{(2x - x^2)^5}{5!} + o(x^5) \\ &= 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

1382.  $\frac{x}{e^x - 1}$  到含  $x^4$  的项.

解 当  $x$  很小时, 令  $\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \Delta$ , 则有

$$\Delta = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4),$$

其中  $\Delta$  也很小, 于是,

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x - 1} &= \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = \frac{1}{1 + \Delta} \\ &= 1 - \Delta + \Delta^2 - \Delta^3 + \Delta^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

注意到

$$\Delta^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{72} + o(x^4),$$

$$\Delta^3 = \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$

$$\Delta^4 = \frac{x^4}{16} + o(x^4),$$

则得

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4).$$

1383.  $\sqrt[3]{\sin x^3}$  到含  $x^{13}$  的项.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sqrt[3]{\sin x^3} &= \left[ x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} + o(x^{15}) \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= x \left[ 1 + \left( \frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12}) \right) \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= x \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{9} \left( \frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12}) \right)^2 + o(x^{12}) \right] \\ &= x - \frac{7}{18}x^7 - \frac{1}{3240}x^{13} + o(x^{13}). \end{aligned}$$

1384.  $\ln \cos x$  到含  $x^6$  的项.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \ln \cos x &= \frac{1}{2} \ln(1 - \sin^2 x) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2} + \frac{\sin^6 x}{3} + o(\sin^6 x) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right)^4 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right)^6 + o(x^6) \Big] \\
& = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6).
\end{aligned}$$

其中用到:  $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$  (当  $x \rightarrow 0$ ), 故  $o(\sin^6 x)$  可换为  $o(x^6)$ .

1385.  $\sin(\sin x)$  到含  $x^3$  的项.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \sin(\sin x) &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3!} + o(x^4) \\
&= \left( x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right) - \frac{1}{3!} \left( x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right)^3 \\
&\quad + o(x^4) \\
&= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

1386.  $\operatorname{tg} x$  到含  $x^5$  的项.

解 当  $x$  很小时, 有

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6), \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) = 1 - \Delta,
\end{aligned}$$

其中  $\Delta = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$  很小, 易见  $\Delta^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^5)$ .

于是,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left( x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6) \right) \frac{1}{1 - \Delta}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6) \right) \\
&\quad \cdot (1 + \Delta + \Delta^2 + o(x^4)) \\
&= \left( x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6) \right) \\
&\quad \cdot \left( 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4) \right) \\
&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

1387.  $\ln \frac{\sin x}{x}$  到含  $x^6$  的项.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \ln \frac{\sin x}{x} &= \ln \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)}{x} \\
&= \ln \left[ 1 + \left( -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right) \right] \\
&= \left( -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3} \left( -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right)^3 + o(x^6) \\
&= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o(x^6).
\end{aligned}$$

1388. 求函数  $f(x) = \sqrt{x}$  按照差  $(x-1)$  的正整数乘幂展开式的前三项.

$$\text{解} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}.$$

$$f(1) = 1, f'(1) = \frac{1}{2}, f''(1) = -\frac{1}{4}.$$

于是,

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

1389. 将函数  $f(x) = x^x - 1$  按照  $(x-1)$  的正整数乘幂展开到含有  $(x-1)^3$  的项.

**解**  $f'(x) = x^x(1 + \ln x),$

$$f''(x) = x^x(1 + \ln x)^2 + x^{x-1},$$

$$f'''(x) = x^x(1 + \ln x)^3 + 2x^{x-1}(1 + \ln x) + x^{x-1}\left(\frac{x-1}{x} + \ln x\right).$$

$$f(1) = 0, f'(1) = 1, f''(1) = 2, f'''(1) = 3.$$

于是,

$$x^x - 1 = (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

1390. 于点  $x=0$  的邻域中, 用二阶抛物线近似地代替函数

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} (a > 0).$$

**解**  $y \Big|_{x=0} = a, y' \Big|_{x=0} = \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_{x=0} = 0,$

$$y'' \Big|_{x=0} = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a} \Big|_{x=0} = \frac{1}{a}.$$

于是,



$$\operatorname{ach} \frac{x}{a} = a + \frac{x^2}{2a} + o(x^2).$$

1391. 按分式  $\frac{1}{x}$  的正整数乘幂展开函数  $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x (x > 0)$  到含  $\frac{1}{x^3}$  的项.

解 由于

$$\sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x^4}\right) + o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

于是,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x^2} - x = x \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} - x \\ &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned}$$

1392. 求函数  $f(h) = \ln(x+h) (x > 0)$  按增量  $h$  的正整数乘幂展开到含  $h^n$  的项 ( $n$  为自然数).

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \ln(x+h) &= \ln\left[x\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right] = \ln x + \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \ln x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{h^n}{nx^n} + o(h^n). \end{aligned}$$

1393. 设:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \cdots \\ &\quad + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h) \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

且  $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ . 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

证 按题设,我们有

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h),$$

其中  $0 < \theta < 1$ .

又因  $f^{(n+1)}(x)$  存在,故

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \\ &\quad + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1}). \end{aligned}$$

比较上面两式,得

$$\begin{aligned} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h) &= \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \\ &\quad + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1}), \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{f^{(n)}(x + \theta h) - f^{(n)}(x)}{\theta h} \\ &= \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x) + n! \frac{o(h^{n+1})}{h^{n+1}}. \end{aligned}$$

由于  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x + \theta h) - f^{(n)}(x)}{\theta h} = f^{(n+1)}(x) \neq 0$ ,

故由上式知  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$  存在,并且

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{\frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x)}{f^{(n+1)}(x)} = \frac{1}{n+1}.$$

1394. 估计下列近似公式的绝对误差:

$$(a) e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad \text{当 } 0 \leq x \leq 1;$$

$$(6) \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad \text{当 } |x| \leq \frac{1}{2};$$

$$(B) \lg x \approx x + \frac{x^3}{3} \quad \text{当 } |x| \leq 0.1;$$

$$(r) \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad \text{当 } 0 \leq x \leq 1.$$

**解** 用拉格朗日余项公式估计误差:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

(a) 由  $f(x) = e^x$  及  $0 \leq x \leq 1$ , 得

$$f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x} < e.$$

于是, 当  $0 \leq x \leq 1$  时,

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{e}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

(6) 由  $f(x) = \sin x$ , 得

$$|f^{(5)}(\theta x)| = \left| \sin\left(\theta x + \frac{5}{2}\pi\right) \right| \leq 1.$$

于是, 当  $|x| \leq \frac{1}{2}$  时,

$$|R_5(x)| \leq \frac{1}{5!} |x|^5 \leq \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{3840}.$$

(B) 由  $f(x) = \operatorname{tg} x$ , 得

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x},$$

$$f'''(x) = \frac{6}{\cos^4 x} - \frac{4}{\cos^2 x},$$

解 误差  $\Delta \leq \frac{|x|^4}{4!}$  按题设需  $\frac{|x|^4}{4!} < 0.0001$ , 于是

$$|x| < 0.22134(\text{弧度}) = 12^\circ 41'.$$

1396. 利用台劳公式近似地计算:

(a)  $\sqrt[3]{30}$ ; (b)  $\sqrt[5]{250}$ ; (c)  $\sqrt[12]{4000}$ ;

(r)  $\sqrt{e}$ ; (d)  $\sin 18^\circ$ ; (e)  $\ln 1.2$ ;

(k)  $\arctg 0.8$ ; (a)  $\arcsin 0.45$ ; (u)  $(1.1)^{1.2}$ , 并估计误差.

解 (a)  $\sqrt[3]{30} = 3 \left( 1 + \frac{1}{9} \right)^{\frac{1}{3}}$

$$\approx 3 \left[ 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} - 1 \right)}{2!} \left( \frac{1}{9} \right)^2 \right]$$

$$\approx 3.1070;$$

$$\Delta < 3 \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}}{3!} \cdot \left( \frac{1}{9} \right)^3 \approx 2.54 \times 10^{-4}.$$

(b)  $\sqrt[5]{250} = 5 \left( 1 + \frac{7}{243} \right)^{\frac{1}{5}}$

$$\approx 5 \left[ 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{243} + \frac{\frac{1}{5} \left( \frac{1}{5} - 1 \right)}{2!} \left( \frac{7}{243} \right)^2 \right]$$

$$\approx 3.0171;$$

$$\Delta < \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5} \cdot \left( \frac{7}{243} \right)^3 \approx 1.15 \times 10^{-6}.$$

(c)  $\sqrt[12]{4000} = 2 \left( 1 + \frac{3}{128} \right)^{\frac{1}{12}}$

$$\approx 2 \left( 1 - \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{128} \right) \approx 1.9960;$$

$$\Delta < \left( \frac{3}{128} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{128}} \approx 5.625 \times 10^{-4}.$$

$$\begin{aligned} (\Gamma) \sqrt{e} &\approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{1}{2} \right)^3 + \frac{1}{4!} \left( \frac{1}{2} \right)^4 \\ &+ \frac{1}{5!} \left( \frac{1}{2} \right)^5 + \frac{1}{6!} \left( \frac{1}{2} \right)^6 \approx 1.64872; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{7!} \left( \frac{1}{2} \right)^7 + \frac{1}{8!} \left( \frac{1}{2} \right)^8 + \dots < \frac{1}{7!} \left( \frac{1}{2} \right)^7 \\ &\frac{1}{1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}} \approx 1.7 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

$$(\Delta) \sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!} \left( \frac{\pi}{10} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left( \frac{\pi}{10} \right)^5 \approx 0.309017,$$

$$\Delta < \frac{1}{7!} \left( \frac{\pi}{10} \right)^7 \approx 6 \times 10^{-8}.$$

$$(e) \ln 1.2 = \ln(1 + 0.2) \approx 0.2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (0.2)^2 + \frac{1}{3} (0.2)^3 - \frac{1}{4} (0.2)^4 \\ &+ \frac{1}{5} (0.2)^5 - \frac{1}{6} (0.2)^6 + \frac{1}{7} (0.2)^7 \approx 0.182322; \end{aligned}$$

$$\Delta < \frac{1}{8} (0.2)^8 \approx 3.2 \times 10^{-7}.$$

$$(\kappa) \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0.8 \approx 0.8 - \frac{1}{3} (0.8)^3 + \frac{1}{5} (0.8)^5$$

$$- \frac{1}{7} (0.8)^7 + \dots = \frac{1}{39} (0.8)^{39}$$

$$\approx 0.67474 (\text{弧度}) \approx 38^\circ 39' 35'';$$

$$\Delta < \frac{1}{4!} (0.8)^{4!} \approx 2.6 \times 10^{-6}.$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \arcsin 0.45 &\approx 0.45 + \frac{1}{2 \cdot 3} (0.45)^3 \\ &+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} (0.45)^5 + \dots \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 13} (0.45)^{13} \\ &\approx 0.46676 \text{ 弧度} \approx 26^\circ 44' 37'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15} (0.45)^{15} \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdots 15}{2 \cdot 4 \cdots 16 \cdot 17} (0.45)^{17} + \dots \\ &< \frac{1}{15} (0.45)^{15} [1 + (0.45)^2 \\ &+ \dots] < \frac{1}{15} (0.45)^{15} \cdot \frac{1}{1 - (0.45)^2} \approx 5.26 \times 10^{-7}. \end{aligned}$$

(n) 事实上, 只需计算  $\ln 1.1$ .

$$\begin{aligned} \ln 1.1 &= \ln(1 + 0.1) = 0.1 - \frac{(0.1)^2}{2} \\ &+ \dots + \frac{(0.1)^5}{5} \approx 0.0953. \end{aligned}$$

取五项, 所以  $(1.1)^{1.2} = e^{1.2 \ln 1.1} \approx e^{1.2 \times 0.0953} \approx 1.12117$ .

$$\Delta = \frac{1}{4!} e^{1.2 \times 0.0953} (0.0953 \times 1.2)^4 < 7.9 \times 10^{-6}.$$

1397. 计算:

(a)  $e$  准确到  $10^{-9}$ ; (b)  $\sin 1^\circ$  准确到  $10^{-8}$ ;

(c)  $\cos 9^\circ$  准确到  $10^{-5}$ ; (d)  $\sqrt{5}$  准确到  $10^{-4}$ ;

(1)  $\log_{10} 11$  准确到  $10^{-5}$ .

$$\begin{aligned}\text{解} \quad (a) \Delta &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left( 1 + \frac{1}{n+1} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}.\end{aligned}$$

要  $\Delta < 10^{-5}$ , 只需  $n!n > 10^5$ , 即只需  $n \geq 11$ . 于是,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{11!} \approx 2.718281828.$$

$$(6) \Delta < \frac{1}{(2n+1)!} \left( \frac{\pi}{180} \right)^{2n+1}.$$

要  $\Delta < 10^{-8}$ , 只需  $\frac{1}{(2n+1)!} \left( \frac{\pi}{180} \right)^{2n+1} < 10^{-8}$ , 即只需  $n \geq 3$ . 于是,

$$\sin 1^\circ \approx \frac{\pi}{180} - \frac{1}{3!} \left( \frac{\pi}{180} \right)^3 \approx 0.01745241.$$

$$(b) \Delta < \frac{1}{(2n)!} \left( \frac{\pi}{20} \right)^{2n}.$$

要  $\Delta < 10^{-5}$ , 只需  $\frac{1}{(2n)!} \left( \frac{\pi}{20} \right)^{2n} < 10^{-5}$ , 即只需  $n \geq 3$ . 于是,

$$\cos 9^\circ \approx 1 - \frac{1}{2!} \left( \frac{\pi}{20} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left( \frac{\pi}{20} \right)^4 \approx 0.98769.$$

$$(c) \sqrt{5} = 2 \left( 1 + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Delta < \frac{2 \cdot (2n-1)!!}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1}.$$

要  $\Delta < 10^{-4}$ , 只需  $\frac{2(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} < 10^{-4}$ , 即只需

$n \geq 4$ . 于是,

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &\approx 2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1 \cdot 1}{2! \cdot 2^2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \right] \\ &\approx 2.2361.\end{aligned}$$

$$(\text{д}) \log_{10} 11 = 1 + \log_{10}(1 + 0.1),$$

$$\Delta < \frac{1}{n+1} (0.1)^{n+1}.$$

要  $\Delta < 10^{-5}$ , 只需  $\frac{1}{n+1} (0.1)^{n+1} < 10^{-5}$ , 即只需  $n \geq 4$ .

于是,

$$\begin{aligned}\log_{10} 11 &\approx 1 + \left[ 0.1 - \frac{1}{2} (0.1)^2 + \frac{1}{3} (0.1)^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} (0.1)^4 \right] \cdot \frac{1}{\ln 10} \approx 1.04139.\end{aligned}$$

利用展开式  $1 - V$ , 求下列极限:

$$1398. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[ 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right] - \left[ 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^4}{4} + o(x^4) \right]}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{1}{4!} - \frac{1}{4 \cdot 2!} \right) x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$



$$1399. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[ \left( 1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2) \right) \cdot \left( x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3) \right) - x(1+x) \right]}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$1400. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left[ x^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left\{ \left( 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} - \frac{1}{16x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - 2 \right) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{4} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$1401. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{6}} - \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{6}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \left( 1 + \frac{1}{6x} - \frac{5}{72x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right. \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 1 - \frac{1}{6x} - \frac{5}{72x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{3} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{3}.$$

1402.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right],$

**解**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right]$   
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \right.$   
 $\left. - x^3 \left( 1 + \frac{1}{2x^6} - \frac{1}{8x^{12}} + o\left(\frac{1}{x^{12}}\right) \right) \right]$   
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{6} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{6}.$

1403.  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} (a > 0).$

**解**  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{x \ln a} + e^{-x \ln a} - 2}{x^2}$   
 $= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} \left[ (1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + o(x^2)) \right.$   
 $\left. + (1 - x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + o(x^2)) - 2 \right]$   
 $= \lim_{x \rightarrow +0} [\ln^2 a + o(1)] = \ln^2 a (a > 0).$

1404.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right].$

**解**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right]$   
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{2}.$$

1405.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$

**解** 
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x \left( x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3!}x + o(x)}{1 + o(x^2)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

1406.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right).$

**解** 
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[ \frac{1}{x} - \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3) \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{3} + o(x^2) \right] = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

当  $x \rightarrow 0$  时, 求出无穷小量  $y$  的形如  $Cx^r$  ( $C$  为常数) 的主项, 假设:

1407.  $y = \operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x).$

**解** 
$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \\ \operatorname{tg} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots. \end{aligned}$$

从而

$$y = \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{2}{15} \sin^5 x + \frac{1}{35} \sin^7 x + o(\sin^7 x) \right)$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \operatorname{tg} x - \frac{1}{3!} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5!} \operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{7!} \operatorname{tg}^7 x + o(\operatorname{tg}^7 x) \right] \\
&= \left( \left[ x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + o(x^7) \right] \right. \\
&\quad + \frac{1}{3} \left[ x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + o(x^7) \right]^3 \\
&\quad + \frac{2}{15} \left[ x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + o(x^7) \right]^5 \\
&\quad \left. + \frac{1}{315} \left[ x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + o(x^7) \right]^7 \right) \\
&= \left( \left[ x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{315} + o(x^7) \right] \right. \\
&\quad - \frac{1}{3!} \left[ x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{315} + o(x^7) \right]^3 \\
&\quad + \frac{1}{5!} \left[ x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{315} + o(x^7) \right]^5 \\
&\quad \left. - \frac{1}{7!} \left[ x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{315} + o(x^7) \right]^7 + o(x^7) \right) \\
&= \frac{x^7}{30} + o(x^7).
\end{aligned}$$

故  $y$  的主项为  $\frac{x^7}{30}$ .

1408.  $y = (1+x)^x - 1$ .

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad y &= e^{\ln(1+x)} - 1 = e^{x(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))} - 1 \\
&= e^{x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)} - 1 \\
&= 1 + \left[ x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \right] + o \left[ x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \right] - 1 \\
&= x^2 + o(x^2),
\end{aligned}$$

解之, 得  $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$ .

1411. 当  $|x|$  为小量时, 推出下列各式的简单的近似公式:

$$(a) \frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+x)^2} (R > 0);$$

$$(b) \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}};$$

$$(c) \frac{A}{x} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{x}{100} \right)^{-n} \right];$$

$$(r) \frac{\ln 2}{\ln \left( 1 + \frac{x}{100} \right)}.$$

**解** (a)  $\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+x)^2} = \frac{1}{R^2} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{x}{R} \right)^{-2} \right]$   
 $\approx \frac{1}{R^2} \left[ 1 - 1 + \frac{2x}{R} \right] = \frac{2x}{R^3};$

$$(b) \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = \left( 1 + \frac{2x}{1-x} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$- \left( 1 - \frac{2x}{1+x} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\approx \left[ 1 + \frac{2x}{3(1-x)} \right] - \left[ 1 - \frac{2x}{3(1+x)} \right]$$

$$\approx \frac{4x}{3(1-x^2)} \approx \frac{4}{3}x;$$

$$(c) \frac{A}{x} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{x}{100} \right)^{-n} \right] \approx \frac{A}{x} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{nx}{100} \right) \right] = \frac{nA}{100};$$

$$(r) \frac{\ln 2}{\ln \left( 1 + \frac{x}{100} \right)} = \frac{\ln 2}{\frac{x}{100} - \frac{x^2}{20000} + \dots}$$

$$\approx \frac{\frac{\ln 2}{x}}{\frac{1}{100}} = \frac{100 \ln 2}{x} \approx \frac{70}{x}.$$

1412. 当  $x$  的绝对值为小量时, 推出形如

$$x = \alpha \sin x + \beta \operatorname{tg} x$$

且准确到  $x^5$  项的近似公式.

把这个公式用于小角度的弧长的近似求法.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad x &= \alpha \left[ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right] \\ &+ \beta \left[ x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \right] \\ &= (\alpha + \beta)x - \left( \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3} \right) x^3 \\ &+ \left( \frac{\alpha}{120} + \frac{2\beta}{15} \right) x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } (1 - \alpha - \beta)x + \left( \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3} \right) x^3 \\ - \left( \frac{\alpha}{120} + \frac{2\beta}{15} \right) x^5 + o(x^5) = 0. \end{aligned}$$

要此近似公式准确到  $x^5$  项, 当且仅当

$$\begin{cases} 1 - \alpha - \beta = 0, \\ \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3} = 0. \end{cases}$$

$$\text{解之, 得} \quad \alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}.$$

于是, 近似公式为

$$x \approx \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\operatorname{tg} x;$$

弧长 = 中心角  $\times$  半径, 设中心角为  $x$ , 半径为  $R$ , 则弧长  $= Rx \approx \frac{2R}{3}\sin x + \frac{R}{3}\operatorname{tg} x$ , 此即小角度的弧长的近似公式.

1413. 估计下面的契比协夫法则的相对误差: 圆弧近似地等于等腰三角形两腰的和, 此等腰三角形是立于弧所对的弦上, 并且高为此弓形之矢的  $\sqrt{\frac{4}{3}}$ .

**解** 如图 2.51 所示

$$BC = R\sin\alpha, BC^2 = R^2\sin^2\alpha = \frac{R^2}{2}(1 - \cos 2\alpha),$$

$$DC = \sqrt{\frac{4}{3}}EC = \sqrt{\frac{4}{3}}R(1 - \cos\alpha),$$

$$DC^2 = \frac{4}{3}R^2(1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha)$$

$$= R^2\left(2 - \frac{8}{3}\cos\alpha + \frac{2}{3}\cos 2\alpha\right).$$

于是,  $BD^2 = BC^2 + DC^2$

$$= R^2\left(\frac{5}{2} - \frac{8}{3}\cos\alpha + \frac{1}{6}\cos 2\alpha\right)$$

$$= R^2\left\{\frac{5}{2} - \frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{24}\alpha^4 - \frac{1}{720}\alpha^6\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\left(1 - 2\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha^4 - \frac{4}{45}\alpha^6\right)\right\} + o(\alpha^7)$$

$$= R^2(\alpha^2 - \frac{1}{90}\alpha^6) + o(\alpha^7)$$

$$= R^2 \alpha^2 \left[ 1 - \frac{1}{90} \alpha^4 + o(\alpha^5) \right]$$

$$= R^2 \alpha^2 (1 - \Delta),$$

$$\text{其中 } \Delta = \frac{1}{90} \alpha^4 + o(\alpha^4),$$

$$BD = R\alpha \sqrt{1 - \Delta} =$$

$$R\alpha \left( 1 - \frac{1}{2} \Delta + o(\Delta^2) \right) =$$

$$R\alpha \left[ 1 - \frac{1}{180} \alpha^4 + o(\alpha^5) \right].$$

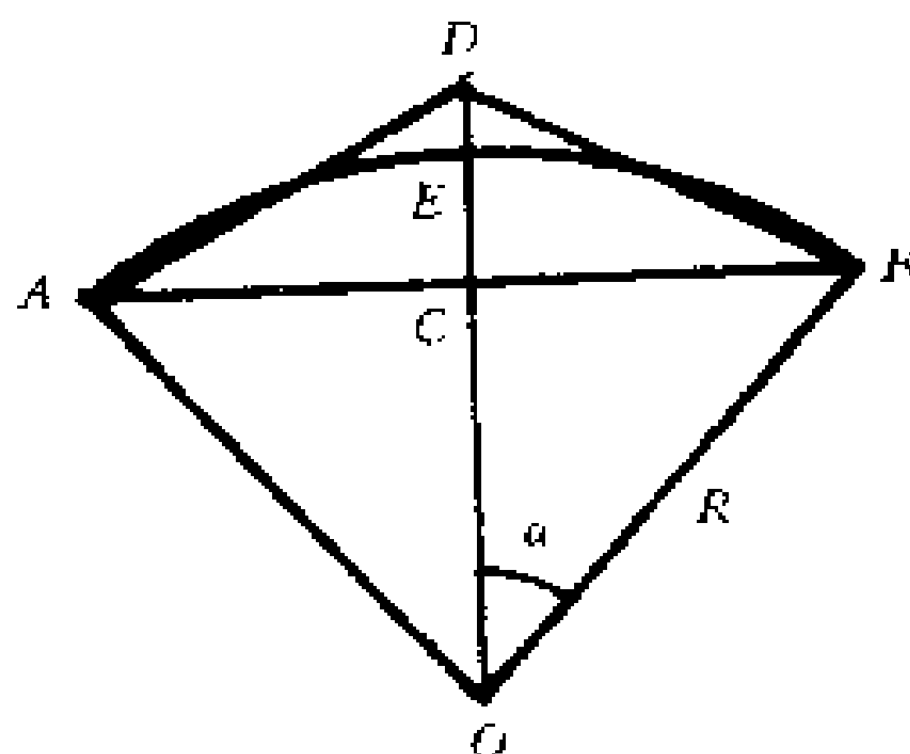


图 2.51

从而得

$$|\widehat{BE} - BD| = \left| R\alpha - R\alpha \left[ 1 - \frac{\alpha^4}{180} + o(\alpha^5) \right] \right|$$

$$= \frac{\alpha^5}{180} R + o(\alpha^5).$$

因此,所求的相对误差为

$$\left| \frac{\widehat{AB} - (\widehat{AD} + \widehat{DB})}{\widehat{AB}} \right| = \left| \frac{2\widehat{BE} - 2BD}{2\widehat{BE}} \right|$$

$$= \frac{|\widehat{BE} - BD|}{|\widehat{BE}|} = \frac{\frac{\alpha^5}{180} R + o(\alpha^5)}{\alpha R} = \frac{\alpha^4}{180} + o(\alpha^5).$$

可见  $\alpha$  愈小,相对误差就愈小,就愈精确.

## § 11. 函数的极值. 函数的最大值和最小值

1° 有极值的必要条件 若函数于点  $x_0$  的两侧邻域中有定义,并且



对于某域： $0 < |x - x_0| < \delta$  内的一切点  $x$ ，有下列的不等式成立：

$$f(x) < f(x_0) \text{ 或 } f(x) > f(x_0),$$

则称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  有极值 (极大值 或 极小值)。

在有极值的点导函数  $f'(x_0) = 0$  (假定它存在)。

2° 有极值的充分条件 第一法则：若(1)函数  $f(x)$  于点  $x_0$  的某邻域  $|x - x_0| < \delta$  内有定义并且是连续的，且在  $x_0$  点， $f'(x_0) = 0$  或不存在(临界点)；(2)  $f(x)$  在范围： $0 < |x - x_0| < \delta$  内有有限值的导函数  $f'(x)$ ；(3) 导函数  $f'(x)$  在  $x_0$  的左侧与右侧有固定的符号，则函数  $f(x)$  的性质用下表表示出来：

	导 函 数 的 符 号		结 论
	$x < x_0$	$x > x_0$	
I	+	+	无 极 值
II	+	-	极 大 值
III	-	+	极 小 值
IV	-	-	无 极 值

第二法则：若函数  $f(x)$  有二阶导函数  $f''(x)$ ，并且在点  $x_0$  有下列条件成立：

$$f'(x_0) = 0 \text{ 与 } f''(x_0) \neq 0,$$

则函数  $f(x)$  在此点有极值，就是说：当  $f''(x_0) < 0$  时，有极大值；当  $f''(x_0) > 0$  时，有极小值。

第三法则：设函数  $f(x)$  于某区间  $|x - x_0| < \delta$  内有导函数  $f'(x)$ ， $\dots, f^{(n-1)}(x)$ ，并且在点  $x_0$  有导函数  $f^{(n)}(x_0)$  及

$f^{(k)}(x_0) = 0 (k = 1, \dots, n-1), f^{(n)}(x_0) \neq 0$ 。这时：(1) 若  $n$  为偶数，则函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处有极值，就是说，当  $f^{(n)}(x_0) < 0$  时，有极大值；当  $f^{(n)}(x_0) > 0$  时有极小值；(2) 若  $n$  为奇数，则函数  $f(x)$  在点  $x_0$  无极值。

3° 绝对极值 在闭区间  $[a, b]$  内，连续函数  $f(x)$ ，或于其临界点

(就是导函数  $f'(x)$  等于零或不存在的点), 或于所给闭区间的端点  $a$  和  $b$ , 达到其最大(最小)值.

研究下列函数的极值:

1414.  $y = 2 - x - x^2$ .

**解**  $y' = 1 - 2x$ , 令  $y' = 0$  得  $x = \frac{1}{2}$ . 由于  $y'' = -2 < 0$ , 所以当  $x = \frac{1}{2}$  时, 函数  $y$  取极大值

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

1415.  $y = (x - 1)^3$ .

**解** 由于  $y' = 3(x - 1)^2 > 0$  (除  $x = 1$  外), 即函数始终上升, 故函数  $y$  无极值.

1416  $y = (x - 1)^4$ .

**解**  $y' = 4(x - 1)^3$ , 令  $y' = 0$  得  $x = 1$ . 当  $x < 1$  时  $y' < 0$ , 当  $x > 1$  时  $y' > 0$ , 所以函数  $y$  当  $x = 1$  时取极小值

$$y = 0.$$

1417.  $y = x^m(1 - x)^n$  ( $m$  及  $n$  为正整数).

**解**  $y' = x^{m-1}(1 - x)^{n-1}[m - (m + n)x]$ , 由  $y' = 0$  得

$$x = 0, x = 1, x = \frac{m}{m + n}.$$

(1) 若  $m$  为偶数, 则

当  $0 < x < \frac{m}{m+n}$  时,  $y' > 0$ ,

当  $x < 0$  时,  $y' < 0$ ,

所以在  $x = 0$  处有极小值  $y = 0$ .

(2) 若  $m$  为奇数, 则  $y'$  在  $x = 0$  邻近不变号, 故无极值.

(3) 不论  $m, n$  是奇数还是偶数时, 由于

当  $0 < x < \frac{m}{m+n}$  时,  $y' > 0$ ,

当  $\frac{m}{m+n} < x < 1$  时,  $y' < 0$ ,

所以, 函数  $y$  在  $x = \frac{m}{m+n}$  处有极大值

$$y = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

(4) 同理, 容易得知: 若  $n$  为偶数时, 则当  $x = 1$  时有极小值

$$y = 0.$$

若  $n$  为奇数, 则当  $x = 1$  时函数  $y$  无极值.

1418.  $y = \cos x + \operatorname{ch} x$ .

解  $y' = -\sin x + \operatorname{sh} x$ , 令  $y' = 0$  得  $x = 0$ . 由于

$$y'' = -\cos x + \operatorname{ch} x, y''(0) = 0,$$

$$y''' = \sin x + \operatorname{sh} x, y'''(0) = 0,$$

$$y^{(4)} = \cos x + \operatorname{ch} x, y^{(4)}(0) = 2 > 0,$$

所以,当  $x = 0$  时有极小值  $y = 2$ .

1419.  $y = (x + 1)^{10} e^{-x}.$

**解**  $y' = e^{-x}(x + 1)^9(9 - x)$ , 令  $y' = 0$  得  $x = -1$  或  $x = 9$ .

由于

当  $x < -1$  时,  $y' < 0$ ,

当  $-1 < x < 9$  时,  $y' > 0$ ,

当  $x > 9$  时,  $y' < 0$ ,

所以,当  $x = -1$  时有极小值  $y = 0$ ; 当  $x = 9$  时有极大值

$$y = 10^{10} e^{-9} \approx 1234100.$$

1420.  $y = \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) e^{-x}$  ( $n$  为自然数).

**解**  $y' = -\frac{1}{n!} e^{-x} x^n$ , 令  $y' = 0$  得  $x = 0$ .

(1) 若  $n$  为偶数, 由于  $y' < 0$  (除  $x = 0$  外), 故当  $x = 0$  时函数  $y$  无极值.

(2) 若  $n$  为奇数, 则

当  $x < 0$  时,  $y' > 0$ ,

当  $x > 0$  时,  $y' < 0$ ,

所以, 当  $x = 0$  时有极大值  $y = 1$ .

1421.  $y = |x|$ .

**解** 当  $x = 0$  时, 得  $y = 0$ , 又在  $x = 0$  的邻域内对于任意  $x \neq 0$ , 恒有  $y = |x| > 0$ , 所以, 当  $x = 0$  时函数有极小值  $y = 0$ . 注意,  $y'|_{x=0}$  不存在.

1422.  $y = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$ .

**解**  $y' = \frac{1-3x}{3\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$ , 令  $y' = 0$  得  $x = \frac{1}{3}$ . 因为

当  $x < 0$  时,  $y' > 0$ ,

当  $0 < x < \frac{1}{3}$  时,  $y' > 0$ ,

当  $\frac{1}{3} < x < 1$  时,  $y' < 0$ ,

当  $x > 1$  时,  $y' > 0$ ,

所以, 当  $x = 0$  时无极值; 当  $x = \frac{1}{3}$  时有极大值

$$y = \frac{1}{3} \sqrt[3]{4} \approx 0.529;$$

当  $x = 1$  时有极小值  $y = 0$ .

1423. 函数

$$f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$$

( $n$  为自然数), 其中函数  $\varphi(x)$  当  $x = x_0$  时连续及  $\varphi(x_0)$

$$f''(x) = \frac{P_1'(x)Q^2(x) - 2Q(x)Q'(x)P_1(x)}{Q^4(x)},$$

于是

$$f''(x_0) = \frac{P_1'(x_0)}{Q_2(x_0)}.$$

由于  $Q_2(x_0) > 0$ , 所以有

$$\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P_1'(x_0).$$

1425. 可否断定下面的事实: 若函数  $f(x)$  在点  $x_0$  有极大值, 则在此点某充分小邻域内, 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的左侧上升, 而右侧下降?

**解** 不能断定. 例如, 函数

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2(2 + \sin \frac{1}{x}), & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时,} \\ 2 & \text{, 当 } x = 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x) - f(0) &= -x^2 \left( 2 + \sin \frac{1}{x} \right) < 0 \\ &(x \in (-\delta, \delta), x \neq 0). \end{aligned}$$

所以在  $x = 0$  点有极大值  $f(0) = 2$ .

易知

$$f'(x) = \cos \frac{1}{x} - 2x \left( 2 + \sin \frac{1}{x} \right) \quad (x \neq 0).$$

故在  $x = 0$  的任意小邻域内  $f'(x)$  都时正时负, 故在  $x = 0$  的左侧或右侧的任意小邻近  $f(x)$  都是振荡的 (时上升时下降).

1426. 已给函数

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ 当 } x \neq 0; f(0) = 0.$$

证明: 虽然

$$f^{(n)}(0) = 0 (n = 1, 2, \dots),$$

函数  $f(x)$  在点  $x = 0$  有极小值.

作出此函数的图形.

证 在 1225 题中已证  $f^{(n)}(0) = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

由于

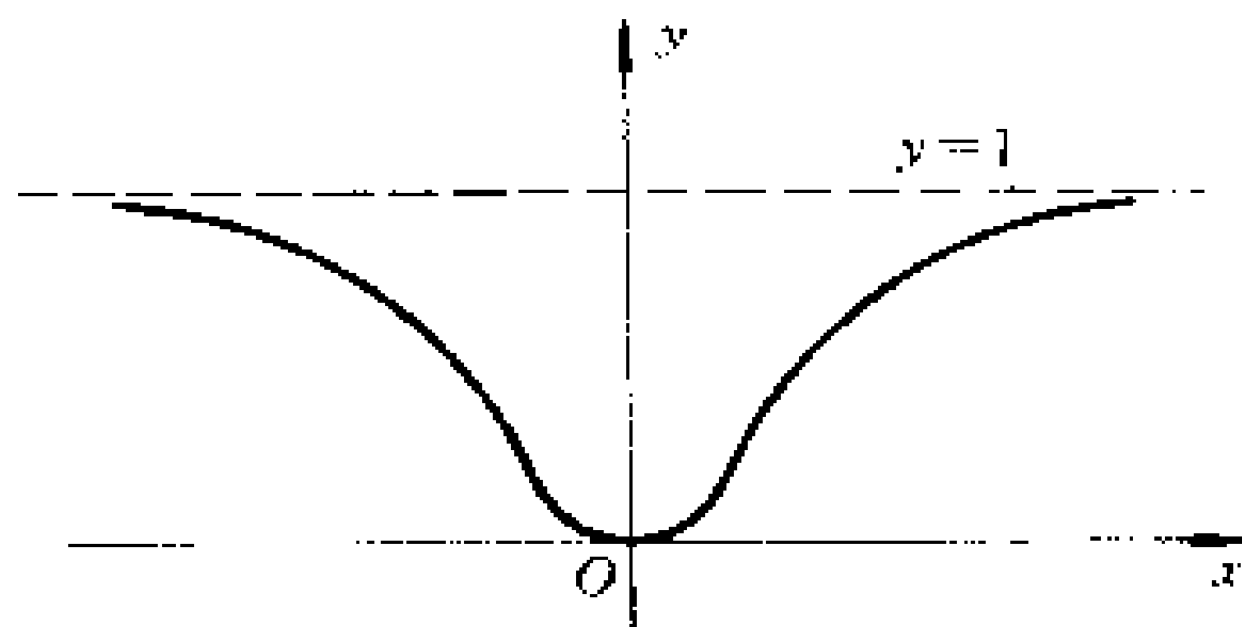


图 2.52

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, f''(x) = \frac{4}{x^5} - \frac{6x^2}{x^6} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

又过  $x = 0$  点  $f'(x)$  从负变到正, 故  $f(0) = 0$  为极小值.

令  $f''(x) = 0$  解得拐点  $x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ . 又由

$$f(x) = f(-x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

知,  $f(x)$  为偶函数,  $y = 1$  为渐近线(图 2.52).

1427. 研究下列函数的极值:

(a) 当  $x \neq 0$  时,  $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \left( \sqrt{2} + \sin \frac{1}{x} \right)$  及

$$f(0) = 0;$$

(6) 当  $x \neq 0$  时,  $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \left( \sqrt{2} + \cos \frac{1}{x} \right)$  及

$$f(0) = 0.$$

作出这些函数的图形.

**解** 由于  $\left| \sin \frac{1}{x} \right| < \sqrt{2}$ ,  $\left| \cos \frac{1}{x} \right| < \sqrt{2}$  及  $e^{-\frac{1}{|x|}} > 0$ , 所以对于(a)和(6)均有  $f(x) > f(0)$  ( $x \neq 0$ ), 故当  $x = 0$  时均有极小值  $f(0) = 0$ . 对于  $x \neq 0$ , (a) 和(6)均存在  $f'(x)$ , 但易知  $f'(x) = 0$  无解, 因而无其它极值.

它们的图形分别如图 2.53 及图 2.54 所示.

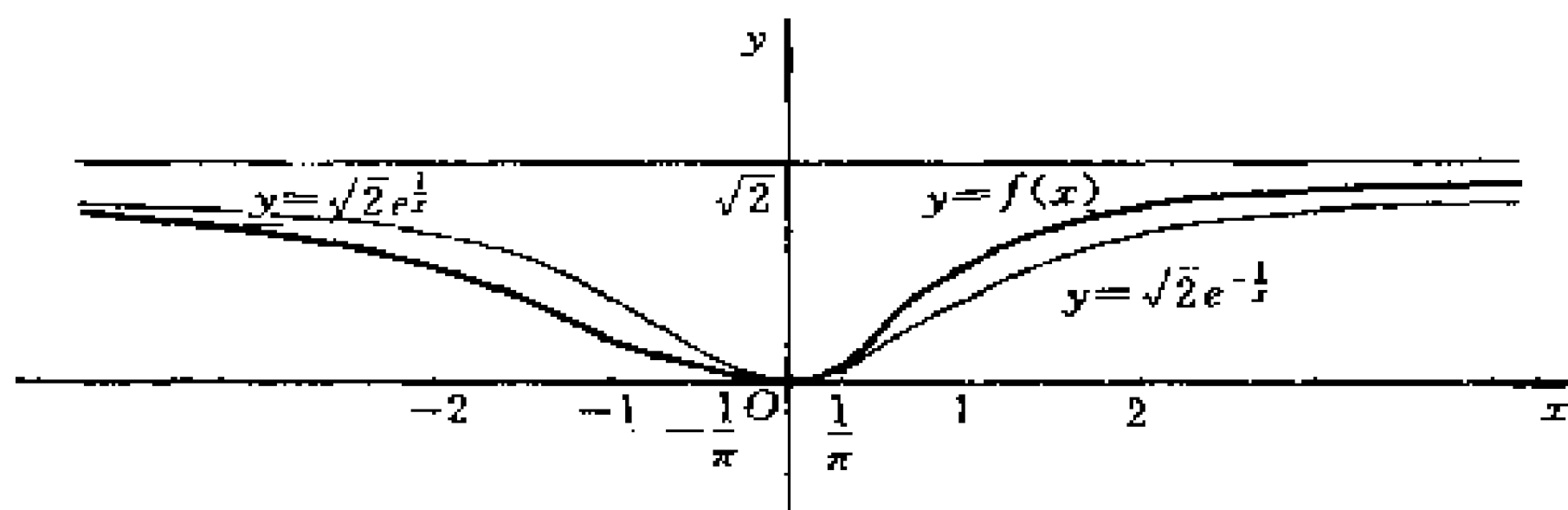


图 2.53



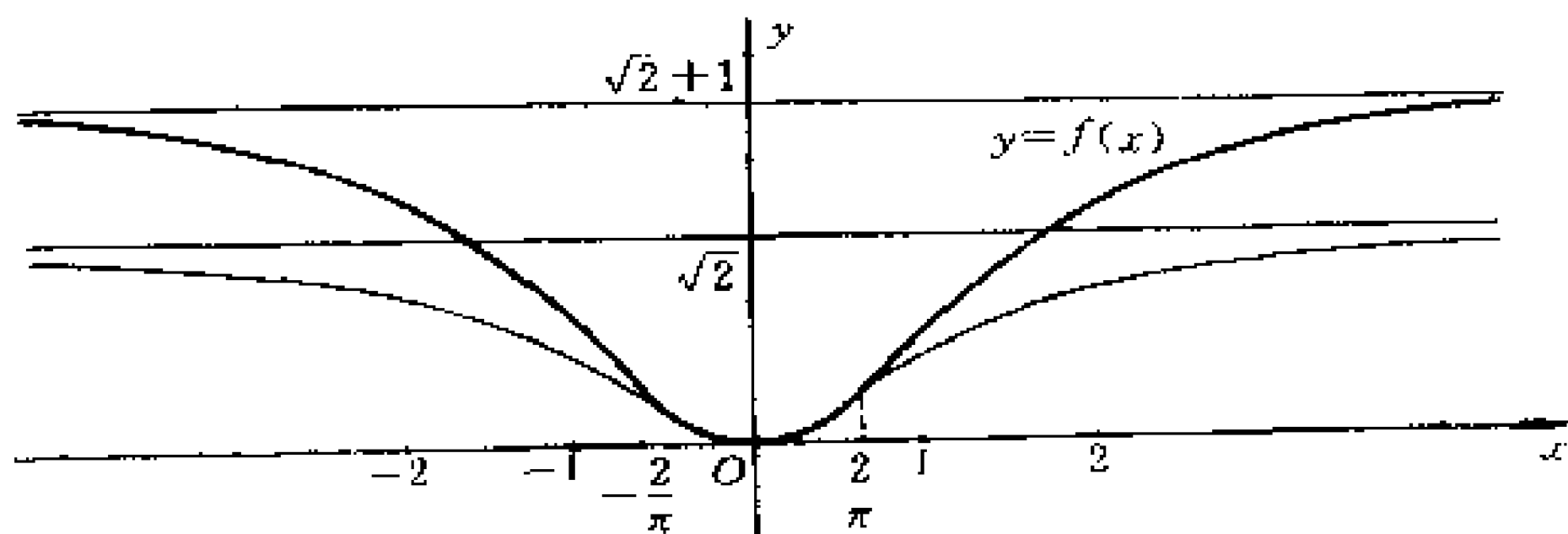


图 2.54

1428. 已给函数

$$f(x) = |x| \left( 2 + \cos \frac{1}{x} \right) \text{ 当 } x \neq 0; f(0) = 0.$$

研究此函数于点  $x = 0$  处的极值, 并作出此函数的图形.

**解** 由于当  $x \neq 0$  时, 恒有  $f(x) > f(0)$ , 故当  $x = 0$  时有极小值  $f(0) = 0$ , 其图形如图 2.55 所示, 它对称于  $Oy$  轴, 又当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) \rightarrow 0$ .

求下列函数的极值:

1429.  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ .

**解**  $y' = 3x^2 - 12x + 9$ , 令  $y' = 0$  得  $x = 1$  或  $3$ . 因为

$$y'' = 6x - 12, y''(1) = -6 < 0, y''(3) = 6 > 0,$$

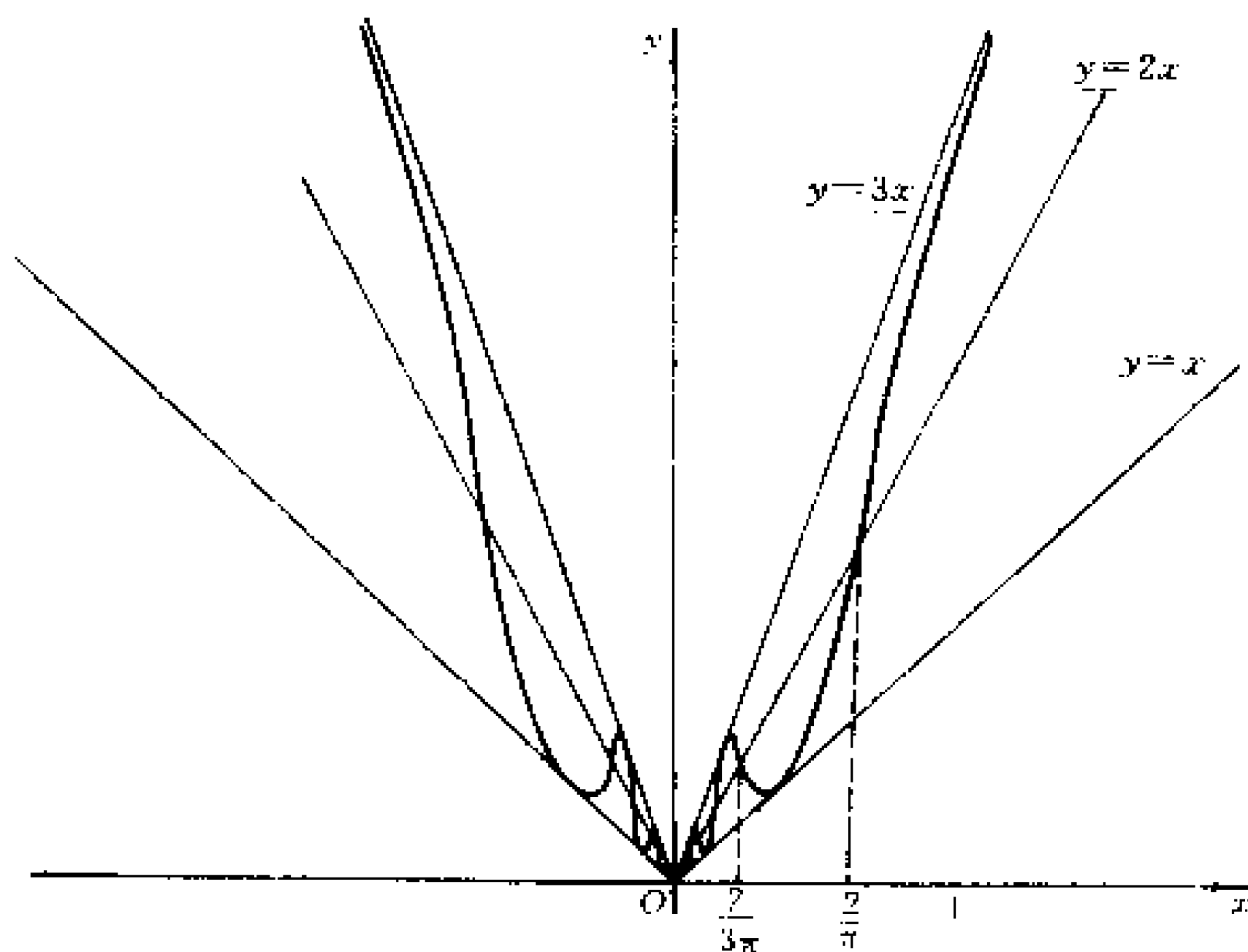


图 2.55

所以,

当  $x = 1$  时有极大值  $y = 1 - 6 + 9 - 4 = 0$ ;

当  $x = 3$  时有极小值  $y = 3^3 - 6 \times 3^2 + 9 \times 3 -$

$4 = -4$ .

1430.  $y = 2x^2 - x^4$ .

解  $y' = 4x - 4x^3$ , 令  $y' = 0$  得  $x = \pm 1$  或  $0$ . 因为

$$y'' = 4 - 12x^2, y''(-1) = -8 < 0,$$

$$y''(0) = 4 > 0, y''(1) = -8 < 0,$$

所以,

当  $x = -1$  时有极大值  $y = 1$ ;

当  $x = 0$  时有极小值  $y = 0$ ;

当  $x = 1$  时有极大值  $y = 1$ .

1431.  $y = x(x-1)^2(x-2)^3$ .

解  $y' = (x-1)(x-2)^2(6x^2-10x+2)$ . 令  $y' = 0$  得  $x = 1, 2$  或  $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$ .

因为

当  $x < \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$  时,  $y' < 0$ ,

当  $\frac{5 - \sqrt{13}}{6} < x < 1$  时,  $y' > 0$ ,

当  $1 < x < \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$  时,  $y' < 0$ ,

当  $\frac{5 + \sqrt{13}}{6} < x < 2$  时,  $y' > 0$ ,

当  $x > 2$  时,  $y' > 0$ ,

所以,

当  $x = \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \approx 0.23$  时有极小值  $y \approx -0.76$ ;

当  $x = 1$  时有极大值  $y = 0$ ;

当  $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \approx 1.43$  时有极小值  $y \approx -0.05$ ;

当  $x = 2$  时无极值.

$$1432. y = x + \frac{1}{x}.$$

解  $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$ , 令  $y' = 0$  得  $x = \pm 1$ . 因为

当  $x < -1$  时,  $y' > 0$ ,

当  $-1 < x < 0$  时,  $y' < 0$ ,

当  $0 < x < 1$  时,  $y' < 0$ ,

当  $x > 1$  时,  $y' > 0$ ,

所以,

当  $x = -1$  时有极大值  $y = -2$ ;

当  $x = 1$  时有极小值  $y = 2$ .

$$1433. y = \frac{2x}{1+x^2}.$$

解  $y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ , 令  $y' = 0$  得  $x = \pm 1$ . 因为

当  $x < -1$  时,  $y' < 0$ ,

当  $-1 < x < 1$  时,  $y' > 0$ ,

当  $x > 1$  时,  $y' < 0$ ,

所以,

当  $x = -1$  时有极小值  $y = -1$ ;

当  $x = 1$  时有极大值  $y = 1$ .

$$1434. y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}.$$

解  $y' = \frac{5x-7}{(x+1)^3}$ , 令  $y' = 0$  得  $x = \frac{7}{5}$ . 因为

当  $-1 < x < \frac{7}{5}$  时,  $y' < 0$ ,

当  $x > \frac{7}{5}$  时,  $y' > 0$ .

所以, 当  $x = \frac{7}{5}$  时有极小值  $y = -\frac{1}{24}$ .

1435.  $y = \sqrt{2x-x^2}$ .

解  $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$ , 令  $y' = 0$  得  $x = 1$ . 因为

当  $0 < x < 1$  时,  $y' > 0$ ,

当  $1 < x < 2$  时,  $y' < 0$ ,

所以, 当  $x = 1$  时有极大值  $y = 1$ .

其次, 由于函数  $y$  的值不为负数, 故当  $x = 0$  及  $x = 2$  时, 有边界的极小值  $y = 0$ .

1436.  $y = x \sqrt[3]{x-1}$ .

解  $y' = \frac{4x-3}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}$ , 令  $y' = 0$  得  $x = \frac{3}{4}$ . 因为

当  $x < \frac{3}{4}$  时,  $y' < 0$ ,

当  $x > \frac{3}{4}$  时,  $y' > 0$ ,

所以, 当  $x = \frac{3}{4}$  时有极小值  $y = -\frac{3}{8} \sqrt[3]{2} \approx -0.47$ .

此外, 对于  $y' \rightarrow \infty$  的点也可能有极值, 但在此题

中,当  $x$  经过 1 时,导数不变号,故当  $x = 1$  时无极值.

1437.  $y = xe^{-x}$ .

解  $y' = e^{-x}(1-x)$ , 令  $y' = 0$  得  $x = 1$ . 因为

当  $x < 1$  时,  $y' > 0$ .

当  $x > 1$  时,  $y' < 0$ ,

所以,当  $x = 1$  时有极大值  $y = e^{-1} \approx 0.368$ .

1438.  $y = \sqrt{x} \ln x$ .

解  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x + 2)$ , 令  $y' = 0$  得  $x = e^{-2}$ . 因为

当  $0 < x < e^{-2}$  时,  $y' < 0$ ,

当  $x > e^{-2}$  时,  $y' > 0$ ,

所以,当  $x = e^{-2} \approx 0.135$  时有极小值  $y = -\frac{2}{e}$   
 $\approx -0.736$ .

又因当  $0 < x < 1$  时,  $y < 0$ , 而

$$y = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \ln x = 0,$$

所以,当  $x = +0$  时有边界的极大值  $y = 0$ .

1439.  $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ .

解  $y' = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2}$ , 令  $y' = 0$  得  $x = 1$  或  $e^2$ . 因为

当  $0 < x < 1$  时,  $y' < 0$ ,

当  $1 < x < e^2$  时,  $y' > 0$ ,

$$1442. y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2).$$

解  $y' = \frac{1-x}{1+x^2}$ , 令  $y' = 0$  得  $x = 1$ . 因为

当  $x < 1$  时,  $y' > 0$ ,

当  $x > 1$  时,  $y' < 0$ ;

所以, 当  $x = 1$  时有极大值  $y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0.439$ .

$$1443. y = e^x \sin x.$$

解  $y' = e^x (\sin x + \cos x)$ , 令  $y' = 0$  得

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ 或 } \frac{3\pi}{4} + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \dots).$$

因为

$$y'' = 2e^x \cos x,$$

$$y'' \Big|_{x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi} > 0,$$

$$y'' \Big|_{x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi} < 0,$$

所以, 当  $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$  时有极小值  $y = -$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi};$$

$$\text{当 } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ 时有极大值 } y = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}.$$

$$1444. y = |x| e^{-(x+1)}.$$

解 当  $x < 0$  时,  $y = -xe^{x+1}$ ,  $y' = -(x+1)e^{x+1}$ .

令  $y' = 0$  得  $x = -1$ . 因为

小值,因此也就是最小值,即  $m = 2$ .

又由于  $f''(x) > 0$ , 曲线呈凹状, 所以在端点取得最大值, 从而,

$$M = \max\{f(-3), f(10)\} = 66.$$

1447.  $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ , 在闭区间  $[-10, 10]$  上.

**解** 由于  $f(x) \geq 0$ , 故对于在区间  $[-10, 10]$  上能使  $f(x) = 0$  的点取得最小值. 由  $x^2 - 3x + 2 = 0$  得  $x = 1, 2$ . 即当  $x = 1, 2$  时, 函数取得最小值

$$m = 0.$$

其次,  $f'(x) = (2x - 3)\operatorname{sgn}(x^2 - 2x + 3)$ ,

当  $1 < x < \frac{3}{2}$  时,  $f'(x) > 0$ ,

当  $\frac{3}{2} < x < 2$  时,  $f'(x) < 0$ ,

所以, 当  $x = \frac{3}{2}$  时有极大值  $y = \frac{1}{4}$ , 于是

$$M = \max\left\{f\left(\frac{3}{2}\right), f(-10), f(10)\right\} = 132.$$

1448.  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ , 在闭区间  $[0.01, 100]$  上.

**解** 利用 1432 题结果知  $f(x)$  当  $x = 1$  时有极小值  $f(1) = 2$ .

由于在此闭区间  $[0.01, 100]$  上  $f(1)$  为唯一的极小



值,因此也是最小值,即

$$m = 2.$$

其次,最大值

$$M = \max\{f(0.01), f(100)\} = 100.01.$$

1449.  $f(x) = \sqrt{5-4x}$ , 在闭区间  $[-1, 1]$  上.

解 
$$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{5-4x}} < 0.$$

因此函数  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上单调下降, 所以, 最小值和最大值分别为

$$m = f(1) = 1, M = f(-1) = 3.$$

求下列函数的下界 (inf) 与上界 (sup):

1450.  $f(x) = xe^{-0.01x}$ , 在区间  $(0, +\infty)$  内.

解 当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f(x) > 0$ , 而  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 于是,

$$\inf\{f(x)\} = 0.$$

其次, 求极值判断得知, 当  $x = 100$  时, 函数  $f(x)$  取极大值, 并且是唯一的极值, 即为最大值. 于是,

$$\sup\{f(x)\} = f(100) = \frac{100}{e} \approx 36.8.$$

1451.  $f(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!})e^{-x}$ , 在区间  $(0, +\infty)$  内.

**解** 由 1420 题知,  $f'(x) < 0$ , 即  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  内单调递减, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, f(0) = 1$ . 于是,

$$\inf\{f(x)\} = 0, \sup\{f(x)\} = 1.$$

1452.  $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$ , 在区间  $(0, +\infty)$  内.

**解**  $f(x) > 0$ , 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . 于是,

$$\inf\{f(x)\} = 0.$$

容易验证, 当  $x = \sqrt{\sqrt{2}-1}$  时函数  $f(x)$  有极大值, 并且只有一个极值, 因而就是最大值. 于是,

$$\begin{aligned} \sup\{f(x)\} &= f(\sqrt{\sqrt{2}-1}) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}) \approx 1.2. \end{aligned}$$

1453.  $f(x) = e^{-x^2} \cos x^2$ , 在区间  $(-\infty, +\infty)$  内.

**解** 可以求得, 函数的最小值和最大值分别为

$$\begin{aligned} m &= f\left(\pm \sqrt{\frac{3\pi}{4}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}} \approx -0.067, \\ M &= f(0) = 1. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \inf\{f(x)\} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}} \approx -0.067, \\ \sup\{f(x)\} &= 1. \end{aligned}$$

1454. 求函数  $f(\xi) = \frac{1+\xi}{3+\xi^2}$  在区间  $x < \xi < +\infty$  内的下界与

上界,作出下列函数的图形:

$$m(x) = \inf_{x < \xi < +\infty} f(\xi) \text{ 及 } M(x) = \sup_{x < \xi < +\infty} f(\xi).$$

解 由于  $f(-3), f(1)$  分别是函数  $f(\xi)$  的极小值和极大值, 又  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} f(\xi) = 0$ , 于是,

$$\text{当 } -\infty < x \leq -3 \text{ 时, } m(x) = f(-3) = -\frac{1}{6},$$

$$\text{当 } -3 < x \leq -1 \text{ 时, } m(x) = \frac{1+x}{3+x^2},$$

$$\text{当 } -1 < x < +\infty \text{ 时, } m(x) = 0;$$

$$\text{当 } -\infty < x \leq 1 \text{ 时, } M(x) = f(1) = \frac{1}{2},$$

$$\text{当 } 1 < x < +\infty \text{ 时, } M(x) = \frac{1+x}{3+x^2}.$$

$m(x)$  及  $M(x)$  的图形分别如图 2.56 及图 2.57 所示.

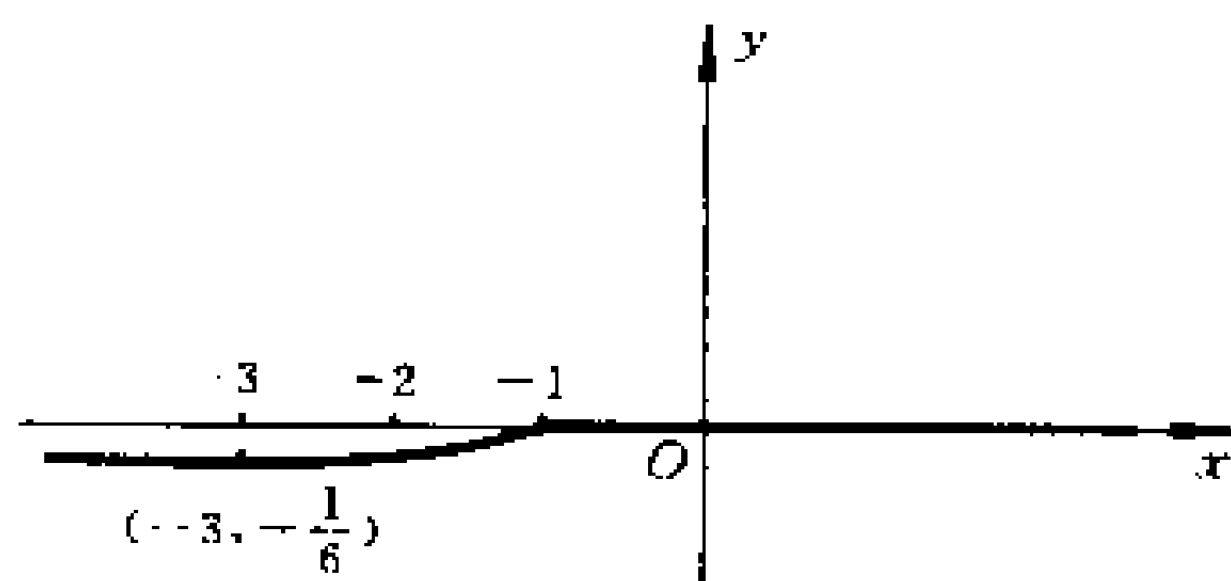


图 2.56

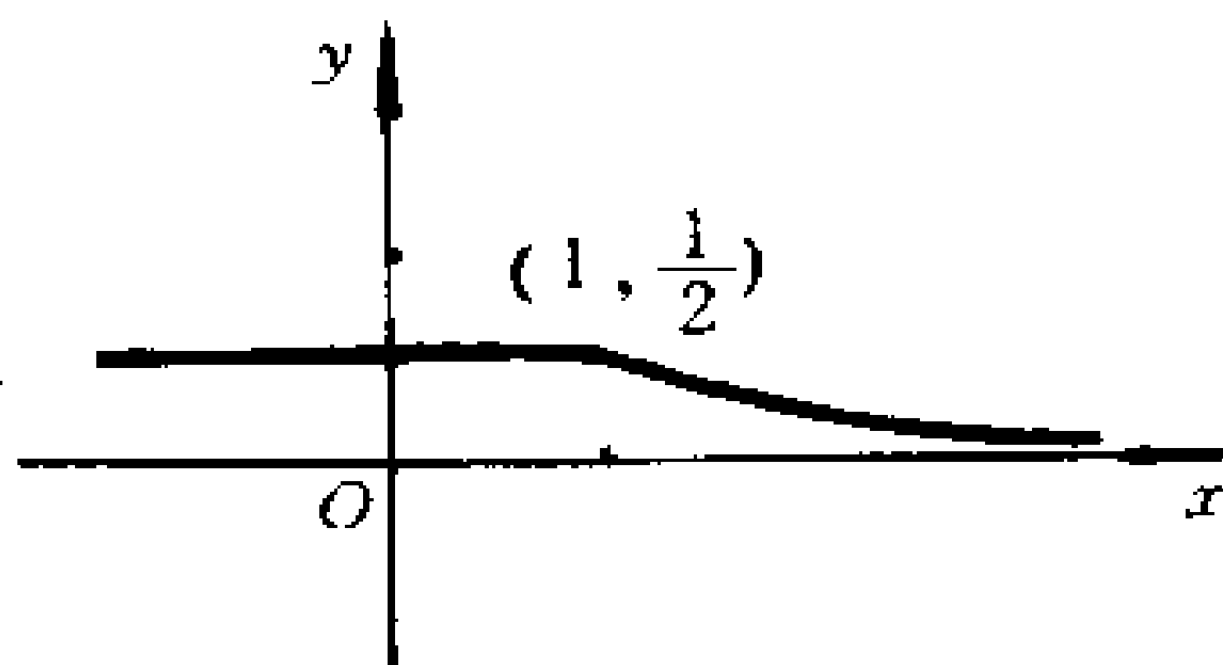


图 2.57

1455. 求以下各叙列的最大项:

(a)  $\frac{n^{10}}{2^n} (n = 1, 2, \dots);$

(b)  $\frac{\sqrt{n}}{n + 10000} (n = 1, 2, \dots);$

(c)  $\sqrt[n]{n} (n = 1, 2, \dots).$

**解** (a) 经判断知当  $x = \frac{10}{\ln 2}$  时,  $f(x) = \frac{x^{10}}{2^x}$  有极大值, 并且是唯一的极值. 从而, 最大项

$$\max\left(\frac{n^{10}}{2^n}\right) = \max\left(\frac{(N-1)^{10}}{2^{N-1}}, \frac{N^{10}}{2^N}, \frac{(N+1)^{10}}{2^{N+1}}\right),$$

其中  $N = \left[\frac{10}{\ln 2}\right] = 14$ . 于是

$$\begin{aligned} \max\left(\frac{n^{10}}{2^n}\right) &= \max\left(\frac{13^{10}}{2^{13}}, \frac{14^{10}}{2^{14}}, \frac{15^{10}}{2^{15}}\right) = \frac{14^{10}}{2^{14}} \\ &\approx 1.77 \times 10^7. \end{aligned}$$

(b) 经判断知当  $x = 10000$  时  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 10000}$  有

极大值,并且是唯一的极值.于是,最大项

$$\max\left(\frac{\sqrt{n}}{n+10000}\right) = f(10000) = \frac{1}{200}.$$

(B) 经判断知当  $x=e$  时,  $f(x)=x^{\frac{1}{x}} (x>0)$  有极大值,并且是唯一的极值.于是,最大项

$$\max(\sqrt[n]{n}) = \max(\sqrt[3]{3}, \sqrt{2}) = \sqrt[3]{3} \approx 1.44.$$

1456. 证明下列不等式:

(a) 当  $|x| \leq 2$  时,  $|3x - x^3| \leq 2$ ;

(b) 若  $0 \leq x \leq 1$  及  $p > 1$ , 则  $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$ ;

(B) 当  $m > 0, n > 0$  及  $0 \leq x \leq a$  时,

$$x^m(a-x)^n \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n};$$

(Г)  $\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \sqrt[n]{x^n + a^n} \leq x+a (x>0, a>0, n>1)$ ;

(Д)  $|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$

证 (a) 设  $f(x) = 3x - x^3$ , 经判断知, 在  $|x| \leq 2$  上, 其最小值和最大值分别为

$$m = f(-1) = -2, M = f(1) = 2,$$

而边界函数值为  $f(-2) = 2, f(2) = -2$ . 于是,

$$|3x - x^3| \leq 2.$$

(6) 设  $f(x) = x^p + (1-x)^p$ , 经判断知  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p+1}}$  为  $0 \leq x \leq 1$  上的唯一的极小值, 而边界值  $f(0) = f(1) = 1$ , 所以

$$\frac{1}{2^{p+1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq x + (1-x) = 1.$$

(B) 设  $f(x) = x^m(a-x)^n$ , 经判断知  $f\left(\frac{ma}{m+n}\right)$  为  $0 \leq x \leq a$  上的唯一的极大值, 所以  $x^m(a-x)^n \leq \left(\frac{ma}{m+n}\right)^m \cdot \left(a - \frac{ma}{m+n}\right)^n = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}$ .

(r) 设  $f(x) = \frac{(x^n + a^n)^{\frac{1}{n}}}{x+a}$ , 经判断知  $f(a) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}}$  为满足  $x > 0$  的唯一的极小值, 而边界值  $f(+0) = f(+\infty) = 1$ , 所以

$$\frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \frac{(x^n + a^n)^{\frac{1}{n}}}{x+a} \leq 1.$$

由于  $x+a > 0$ , 于是

$$\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \sqrt[n]{x^n + a^n} \leq x+a.$$

(c)  $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$ ,

其中  $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , 所以恒有

$$|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

1457. 求多项式

$$P(x) = x(x-1)^2(x+2)$$

在闭区间 $[-2, 1]$ 上“与零的差”, 就是求

$$E_p = \sup_{-2 \leq x \leq 1} |P(x)|.$$

解  $P'(x) = 2(x-1)(2x^2 + 2x - 1)$ .

令  $P'(x) = 0$  得  $x = 1$  或  $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ , 所以

$$E_p = \max\{|P(-2)|, |P(1)|,$$

$$\begin{aligned} & \left| P\left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right) \right|, \left| P\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right) \right| \} \\ &= \left| P\left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right) \right| = \frac{9 + 6\sqrt{3}}{4} \approx 4.85. \end{aligned}$$

1458. 应当选择怎样的系数  $q$ , 使多项式

$$P(x) = x^2 + q$$

在闭区间 $[-1, 1]$ 上与零的差最小, 即

$$E_p = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| = \min.$$

解  $P'(x) = 2x$ , 令  $P'(x) = 0$  得  $x = 0$ , 所以

$$\begin{aligned} E_p &= \max\{|P(0)|, |P(1)|, |P(-1)|\} \\ &= \max\{|q|, |1 + q|\}. \end{aligned}$$

当  $|q| = |1 + q|$  时,  $E_p$  最小. 解之, 得

$$q = -\frac{1}{2}.$$

此最小的绝对差.

**解** 由于

$$f(x) - g(x) = x^2 - [(x_1 + x_2)x + b],$$

$$f'(x) - g'(x) = 2x - (x_1 + x_2),$$

从而令  $f'(x) - g'(x) = 0$ , 得  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ . 又因

$$f''(x) - g''(x) = 2 > 0,$$

故当  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$  时,  $f(x) - g(x)$  取极小值. 于是,

$$\begin{aligned}\Delta &= \max \left\{ \left| f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \right|, \right. \\ &\quad \left. \left| f(x_1) - g(x_1) \right|, \left| f(x_2) - g(x_2) \right| \right\} \\ &= \max \left\{ \left| b + \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \right|, \left| b + x_1 x_2 \right| \right\}.\end{aligned}$$

要  $\Delta$  为最小, 需

$$\left| b + \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \right| = \left| b + x_1 x_2 \right|.$$

解之得

$$b = -\frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 x_2).$$

此时

$$g(x) = (x_1 + x_2)x - \frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 x_2),$$

而最小的绝对差



$$\Delta = \frac{1}{8}(x_1 - x_2)^2.$$

1461. 求函数

$$f(x) = \max\{2|x|, |1+x|\}$$

的极小值.

**解**  $y = 2|x|$  及  $y = |1+x|$  的图形如图 2.58 所示, 它们的交点是  $A\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$  及  $B(1, 2)$ . 从而

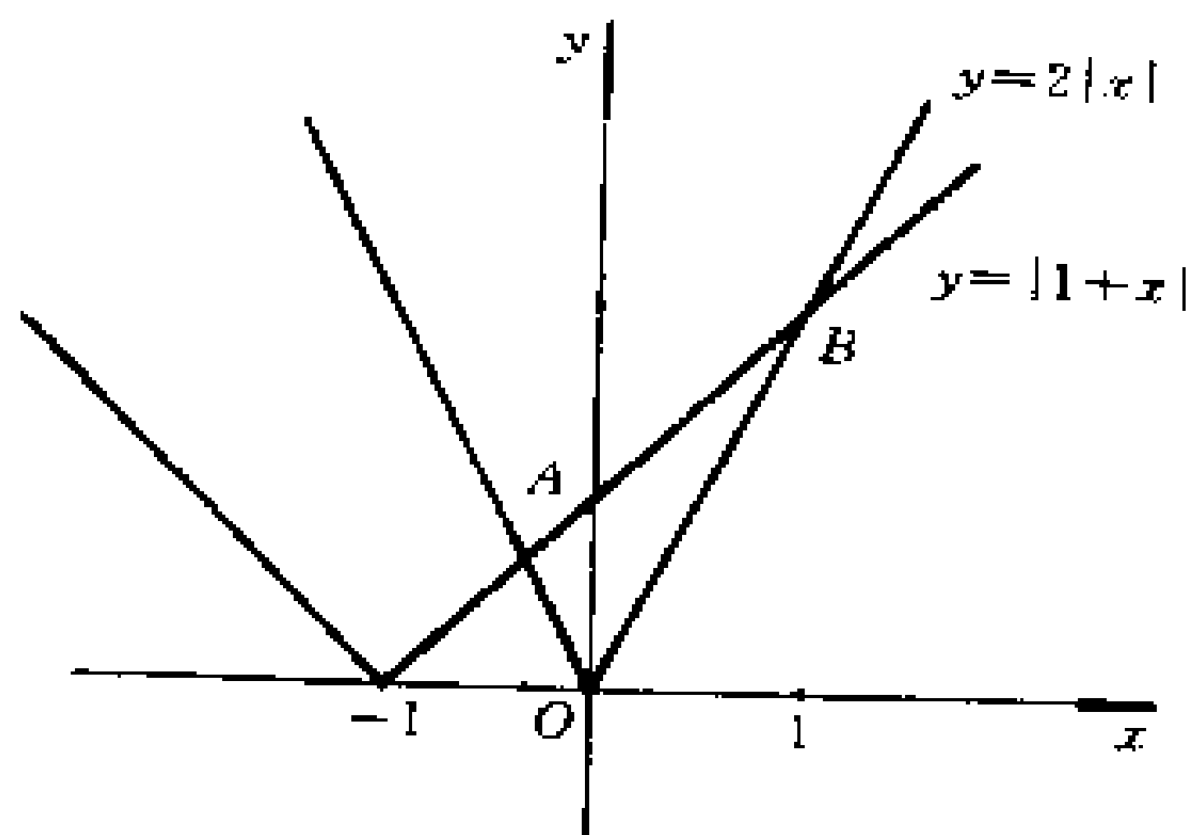


图 2.58

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 1 \leq x < +\infty, \\ 1+x, & -\frac{1}{3} \leq x \leq 1, \\ -2x, & -\infty < x \leq -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

于是, 函数  $f(x)$  的极小值为  $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ .

确定下列各方程实根的数目, 并定这些根所在的范围:

$$1462. x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0.$$

**解** 设  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$ , 则  $f(x)$  为在  $(-\infty, +\infty)$  内的连续函数, 且有

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$$

令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x = 1$  或  $3$ .

当  $x \in (-\infty, 1)$  时, 由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, f'(x) > 0, f(1) = -6 < 0,$$

故在区间  $(-\infty, 1)$  内方程无实根.

当  $x \in (1, 3)$  时, 由于

$$f'(x) < 0, f(3) = -10 < 0,$$

故在  $(1, 3)$  内也无实根.

当  $x \in (3, +\infty)$ , 由于

$$f'(x) > 0, f(3) = -10 < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

故在  $(3, +\infty)$  内方程有且仅有一实根.

$$1463. x^3 - 3x^2 - 9x + h = 0.$$

**解** 设  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + h$ , 则

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$$

令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x = -1$  或  $3$ . 由于

$$f(-1) = 5 + h, f(3) = -27 + h,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

故当  $h < -5$  时,  $f(-1) < 0, f(3) < 0$ , 且

$$f'(x) > 0, x \in (-\infty, -1),$$

$$f'(x) < 0, x \in (-1, 3),$$

$$f'(x) > 0, x \in (3, +\infty),$$

因此, 有且仅有一实根位于  $(3, +\infty)$  内.

当  $-5 < h < 27$  时,  $f(-1) > 0, f(3) < 0$ , 导数  $f'(x)$  的符号变化同上, 于是, 有三个实根, 分别位于  $(-\infty, -1), (-1, 3)$  及  $(3, +\infty)$  内.

当  $h > 27$  时,  $f(3) > 0, f(-1) > 0$ , 因此, 有且仅有一实根位于  $(-\infty, -1)$  内.

1464.  $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0.$

**解** 设  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20$ , 则

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12.$$

令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x = \pm 1$ . 由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$f(-1) = -31 < 0, f(1) = -15 < 0,$$

并且

$$f'(x) < 0, x \in (-\infty, -1),$$

$$f'(x) > 0, x \in (-1, +\infty),$$

故有两实根, 分别位于  $(-\infty, -1)$  和  $(1, +\infty)$  内.

1465.  $x^5 - 5x = a.$

**解** 设  $f(x) = x^5 - 5x - a$ , 则

$$f'(x) = 5x^4 - 5.$$

令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x = \pm 1$ . 由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$f'(x) > 0, x \in (-\infty, -1), x \in (1, +\infty),$$

$$f'(x) < 0, x \in (-1, 1),$$

$$f(-1) = 4 - a, f(1) = -4 - a,$$

故当  $a < -4$  时,  $f(-1) > 0, f(1) > 0$ . 因此, 有且仅有一实根, 位于  $(-\infty, -1)$  内; 当  $-4 < a < 4$  时,  $f(-1) > 0, f(1) < 0$ , 此时有三个实根, 分别位于  $(-\infty, -1), (-1, 1)$  和  $(1, +\infty)$  内; 当  $a > 4$  时,  $f(-1) < 0, f(1) < 0$ . 因此, 有且仅有一实根位于  $(1, +\infty)$  内.

1466.  $\ln x = kx.$

**解** 当  $k = 0$  时, 方程显然仅有一个根  $x = 1$ . 因此, 不妨设  $k \neq 0$ . 令  $f(x) = \ln x - kx (x > 0)$ , 则

$$f'(x) = \frac{1}{x} - k.$$

令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x = \frac{1}{k}$ . 由于

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

故曲线的图形始终呈凸状.

当  $x \in \left(0, \frac{1}{k}\right)$  时,  $f'(x) > 0$ ;

当  $x \in \left[\frac{1}{k}, +\infty\right)$  时,  $f'(x) < 0$ .

又因

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = \ln \frac{1}{k} - 1,$$

故当  $k > \frac{1}{e}$  时,  $f\left(\frac{1}{k}\right) < 0$ , 此时方程无根.

当  $0 < k < \frac{1}{e}$  时,  $f\left(\frac{1}{k}\right) > 0$ ,

因此, 方程有两个实根, 分别位于  $\left(0, \frac{1}{k}\right)$  和  $\left[\frac{1}{k}, +\infty\right)$  内.

当  $-\infty < k < 0$  时, 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty, f(1) = -k > 0, f'(x) = \frac{1}{x} - k >$$

0, 故此时方程有且仅有一实根位于  $(0, 1)$  内.

1467<sup>+</sup> :  $e^x = ax^2 (a > 0)$ .

**解** 对于函数  $f(x) = e^x - ax^2$ , 有  $f(0) = 1 > 0$ ; 又因  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , 故总存在充分大的正数  $x_0$ , 使  $f(-x_0) < 0$ . 由函数  $f(x)$  的连续性得知在  $(-x_0, 0)$  中, 从而在  $(-\infty, 0)$  中至少有  $f(x) = 0$  的一个实根. 而当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $f'(x) = e^x - 2ax > 0$ , 即函数

严格单调上升. 因此,  $f(x) = 0$ , 当  $x \in (-\infty, 0)$  时只有唯一的根.

对于  $x > 0$  的情况, 为求方程  $e^x = ax^2$  的根, 只需求方程  $x = \ln a + 2 \ln x$  ( $a > 0, x > 0$ ) 的根. 设

$$g(x) = x - \ln a - 2 \ln x,$$

则有

$$g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x - 2}{x}.$$

令  $g'(x) = 0$  得  $x = 2$ .

当  $0 < x < 2$  时,  $g'(x) < 0$ ;

当  $x > 2$  时,  $g'(x) > 0$ ,

所以,  $g(2) = \ln \frac{e^2}{4a}$  为极小值. 又因  $\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = +\infty$ ,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ . 因此,

当  $g(2) > 0$ , 即  $0 < a < \frac{e^2}{4}$  时,  $g(x) = 0$  无根.

当  $g(2) = 0$ , 即  $a = \frac{e^2}{4}$  时,  $g(x) = 0$  有唯一的根.

当  $g(2) < 0$ , 即  $a > \frac{e^2}{4}$  时,  $g(x) = 0$  有二个根, 它们分别位于  $(0, 2)$  和  $(2, +\infty)$  内.

综上所述, 方程  $e^x = ax^2$  根的情况如下:

当  $0 < a < \frac{e^2}{4}$  时有唯一的根, 位于  $(-\infty, 0)$  内; 当  $a = \frac{e^2}{4}$  时, 有两个根, 一根为 2, 一根位于  $(-\infty, 0)$  内; 当  $\frac{e^2}{4} < a < +\infty$  时有三个根, 分别位于  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 2)$  和  $(2, +\infty)$  内.

1468. 当  $0 \leq x \leq \pi$  时,  $\sin^3 x \cdot \cos x = a$ .

解 当  $a = 0$  时, 方程显然有实根  $x = 0, \frac{\pi}{2}$  或  $\pi$ . 因此, 不妨设  $a \neq 0$ . 令  $f(x) = \sin^3 x \cos x - a$ , 则

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x.$$

令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ . 由于

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16} - a, f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{16} - a,$$

$$f(0) = f(\pi) = -a,$$

并且

$$\text{当 } x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \text{ 时, } f'(x) > 0,$$

$$\text{当 } x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \text{ 时, } f'(x) < 0.$$

于是, 当  $|a| < \frac{3\sqrt{3}}{16}$  时, 方程有两个实根位于

$(0, \pi)$  内; 当  $|a| > \frac{3\sqrt{3}}{16}$  时, 方程无实根.

1469.  $\operatorname{ch} x = kx$ .

解 设  $f(x) = \operatorname{ch} x - kx$ , 则

$$f'(x) = \operatorname{sh} x - k.$$

令  $f'(x) = 0$ , 得唯一驻点  $x_0$ , 它适合  $k = \operatorname{sh} x_0$ .

由于  $f''(x) = \operatorname{ch} x > 0$ , 故曲线图形呈凹状, 且在  $x = x_0$  达最小值. 显然  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ , 因此, 我们只需考虑  $f(x_0)$  的符号. 而

$$f(x_0) = \operatorname{ch} x_0 - kx_0 = \operatorname{ch} x_0 - x_0 \operatorname{sh} x_0.$$

先设  $k > 0$ , 于是  $x_0 > 0$ . 引进辅助函数

$$g(x) = \operatorname{ch} x - x \operatorname{sh} x,$$

方程  $g(x) = 0$ , 即  $\operatorname{cth} x = x$  的(唯一)正根  $\xi \approx 1.2^*$ . 由于

$$g'(x) = \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x = -x \operatorname{ch} x,$$

因此假如  $x > 0$ , 则  $g'(x) < 0$ , 故  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上严格单调下降.

若  $k > \operatorname{sh} \xi$ , 即  $\operatorname{sh} x_0 > \operatorname{sh} \xi$ , 由于  $\operatorname{sh} x$  是严格增大的, 故必  $x_0 > \xi$ . 从而有

$$f(x_0) = \operatorname{ch} x_0 - x_0 \operatorname{sh} x_0 < \operatorname{ch} \xi - \xi \operatorname{sh} \xi = 0.$$

因此, 方程  $f(x) = 0$  恰有两个实根. 由于

$$f(\xi) = \operatorname{ch} \xi - k\xi < \operatorname{ch} \xi - \xi \operatorname{sh} \xi = 0,$$

$$f(0) = 1,$$

故两根分别位于  $(0, \xi)$  及  $(\xi, +\infty)$  内.

若  $k = \operatorname{sh} \xi$ , 则  $\operatorname{sh} x_0 = \operatorname{sh} \xi$ , 从而  $x_0 = \xi$ . 因此,  $f(x_0) = 0$ , 此时方程  $f(x) = 0$  恰有一实根  $x_0$ .

若  $0 < k < \operatorname{sh} \xi$ , 则  $\operatorname{sh} x_0 < \operatorname{sh} \xi$ , 从而  $x_0 < \xi$ . 因此

$$f(x_0) = \operatorname{ch} x_0 - x_0 \operatorname{sh} x_0 > \operatorname{ch} \xi - \xi \operatorname{sh} \xi = 0,$$

故方程  $f(x) = 0$  无实根.

若  $k = 0$ , 显然方程  $f(x) = 0$  无根.

若  $k < 0$ , 则可令  $x = -t$ , 于是得

$$\operatorname{ch} t = -kt \quad (-k > 0).$$

通过按上述的方法讨论该方程的根, 易知当  $\operatorname{sh} \xi < -k$  时, 原方程有两实根, 分别位于  $(-\xi, 0)$  及  $(-\infty, -\xi)$  内, 其中  $\xi$  满足  $\operatorname{cth} \xi = \xi (\approx 1.2)$ . 而当  $-\operatorname{sh} \xi < k < 0$  时, 方程无实根.

综上所述, 若  $|k| > \operatorname{sh} \xi \approx 1.50$ , 方程有两实根  $x_1$



$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0,$$

此即方程仅有一实根的条件(前面  $p \geq 0$  的情形可合并到此条件中去).

而  $f(x_1) < 0$  及  $f(x_2) > 0$  相当于

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

此即方程有三实根的条件.

如图 2.59 所示, 曲线

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$$

的左右上方是方程仅有一实根的  $(p, q)$  域, 以阴影表之; 而曲线的下方则是方程有三实根的  $(p, q)$  域, 以不具阴影表之.

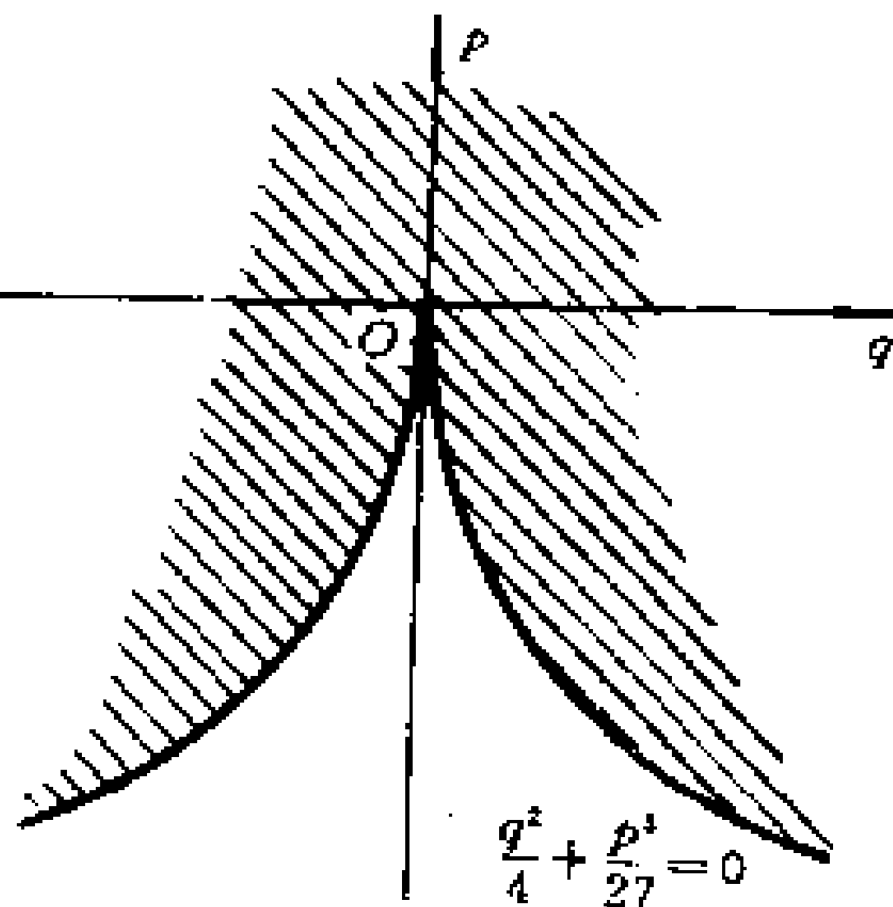


图 2.59

## § 12. 依据函数的特征点作函数图形

为了作出函数  $y = f(x)$  的图形, 必须: (1) 确定此函数的存在域; 并研究函数在其存在域之边界上各点之性质; (2) 查明图形的对称性和周期性; (3) 求出函数的不连续点及连续的区间; (4) 确定函数的零值点及同号区间; (5) 求出极值点及查明函数上升和下降的区间; (6) 确定拐点及函数图形凸凹的区间; (7) 若有渐近线存在则求出渐近线; (8)

指出函数图形的各种特性。

作出下列函数的图形：

1471.  $y = 3x - x^3$

解  $y' = 3 - 3x^2$ , 令  $y' = 0$  得  $x = -1$  或  $1$ .

$y'' = -6x$  令  $y'' = 0$  得  $x = 0$ .

列表

$x$		-1		0		1	
$y'$	-	0	+	+	+	0	-
$y''$	+	+	+	0	-	-	-
$y$	$\searrow$	极小点	$\nearrow$	拐点	$\nearrow$	极大点	$\searrow$

当  $x = -1$  时,

$$y = -2;$$

$$x = 0, \pm \sqrt{3}$$

时,  $y = 0$ ;

$$x = 1 \text{ 时, } y = 2.$$

图形对称于原点

如图 2.60 所示.

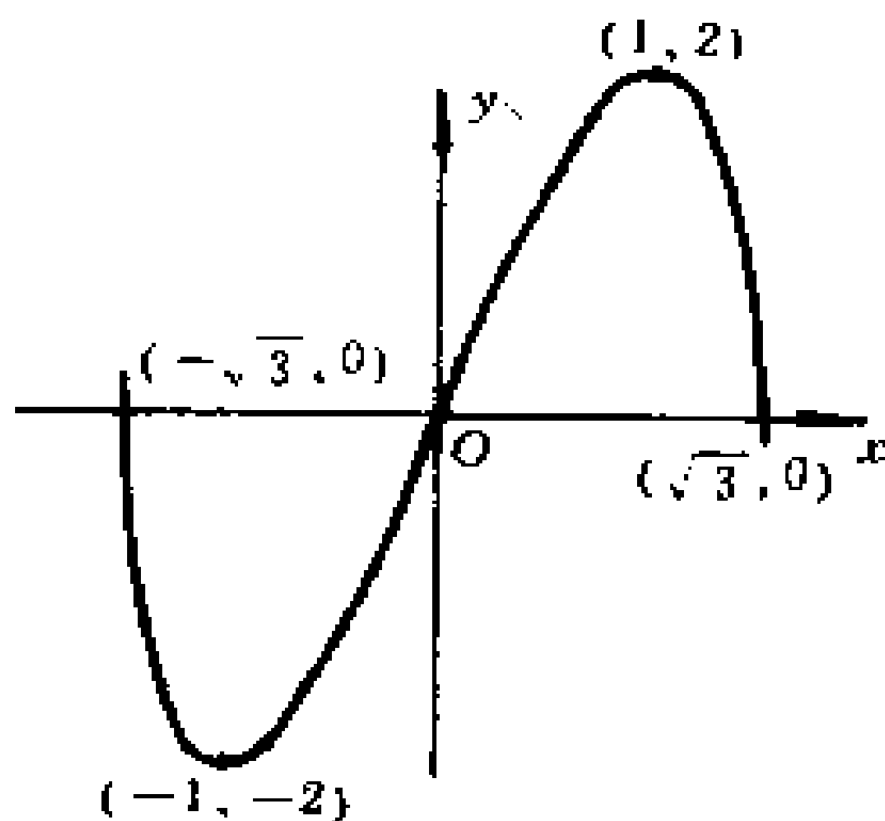


图 2.60

1472.  $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$ .

解 以  $-x$  替代  $x, y$

值不变, 故图形对称于  $Oy$  轴.

零点处:  $x = \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}} \approx \pm 1.65$ .

$y' = 2x - 2x^3$ , 令  $y' = 0$  得  $x = 0$ , 或  $\pm 1$ .

$$y'' = 2 - 6x^2, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

列表

$x$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	
$y'$	—	0	+	+	+	0	—
$y''$	+	+	+	0	—	—	—
$y$	↘	极小点	↗	拐点	↗	极大点	↘

当  $x = 0$  时,  $y = 1$ ;  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  时,  $y = \frac{23}{18}$ ;  $x = 1$  时,  $y = \frac{3}{2}$  (图 2.61)

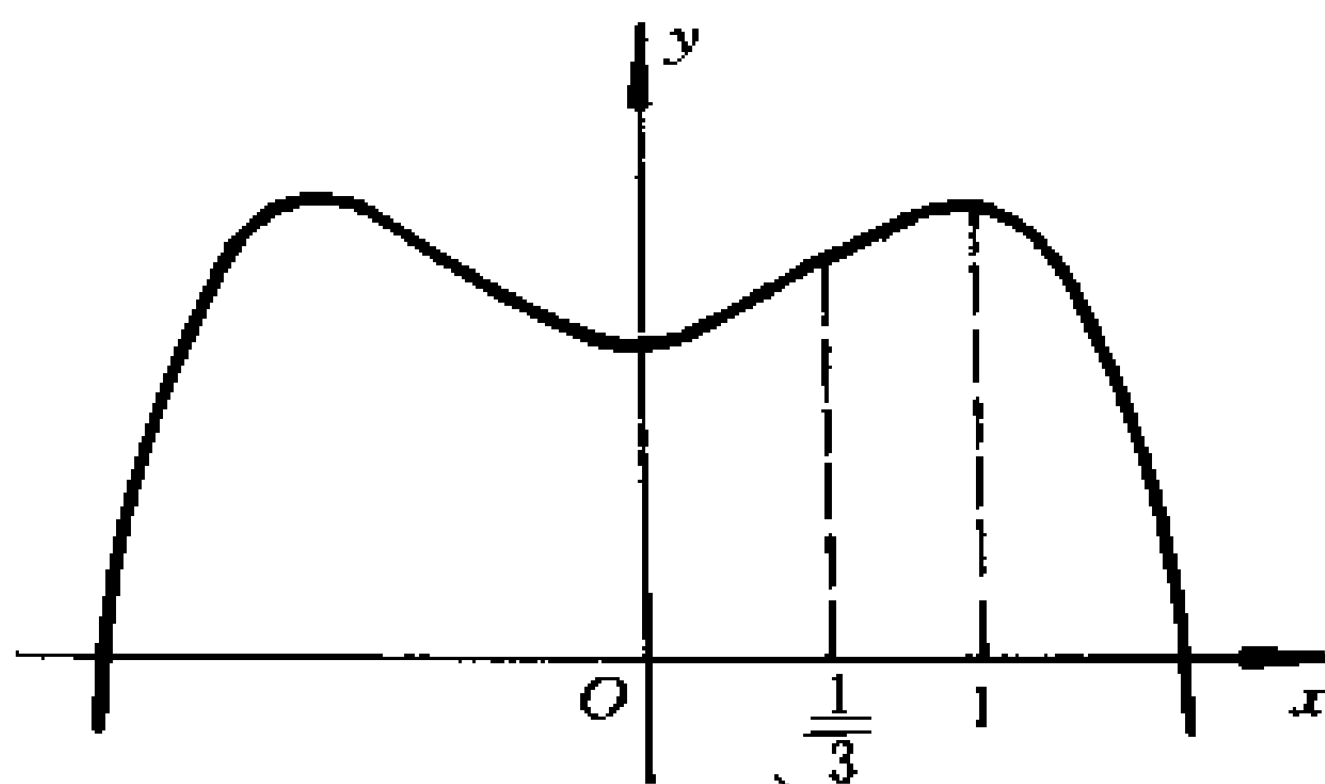


图 2.61

1473.  $y = (x+1)(x-2)^2$

解  $y' = 3x(x-2)$ , 令  $y' = 0$  得  $x = 0$  或  $2$ ;

$y'' = 6x - 6$ , 令  $y'' = 0$  得  $x = 1$ .

列表

$x$		0		1		2	
$y'$	+	0	-	-		0	+
$y''$	-	-	-	0	+	-	+
$y$	$\nearrow$	极大点	$\searrow$	拐点	$\searrow$	极小点	$\nearrow$

当  $x = 0$  时,  $y = 4$ ;

$x = 1$  时,  $y = 2$ ;

$x = 2, -1$  时,  $y = 0$

(图 2.62)

1474.  $y = \frac{2 - x^2}{1 + x^4}$ .

解 显见图形对称于  $Oy$  轴.

零点处:  $x = \pm \sqrt{2}$ .

$$y' = \frac{2x(x^4 - 4x^2 - 1)}{(1 + x^4)^2},$$

图 2.62

令  $y' = 0$  得  $x = 0$  或  $\pm \sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx \pm 2.06$ .

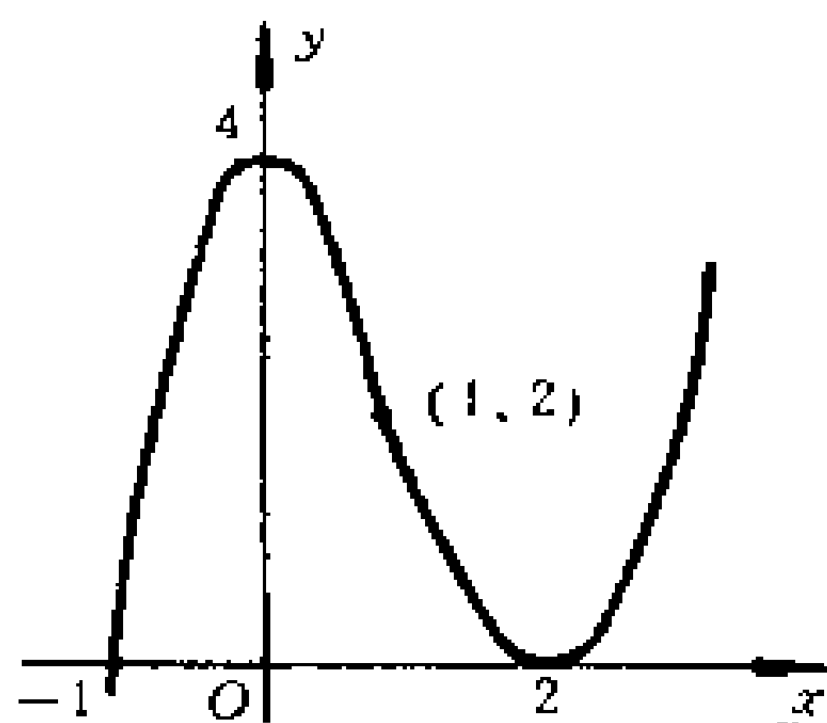
$$y'' = -\frac{2(3x^8 - 20x^6 - 12x^4 + 12x^2 + 1)}{(1 + x^4)^3},$$

令  $y'' = 0$  得  $x = \pm 2.67$  或  $\pm 0.77$ , 经判别知它们为拐点, 又因

$y''|_{x=0} = -2 < 0$ , 故有极大值  $y = 2$ ;

$y''|_{x=\pm \sqrt{2+\sqrt{5}}} > 0$ , 故有极小值  $y = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$   
 $\approx -0.12$ .

渐近线为  $y = 0$ . 事实上, 它的斜率和截距分别为  $k$



$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^2}{x(1 + x^4)} = 0, \text{它在 } y \text{ 轴上的截距为}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [y - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^2}{1 + x^4} = 0. \text{如图 2.63 所示.}$$

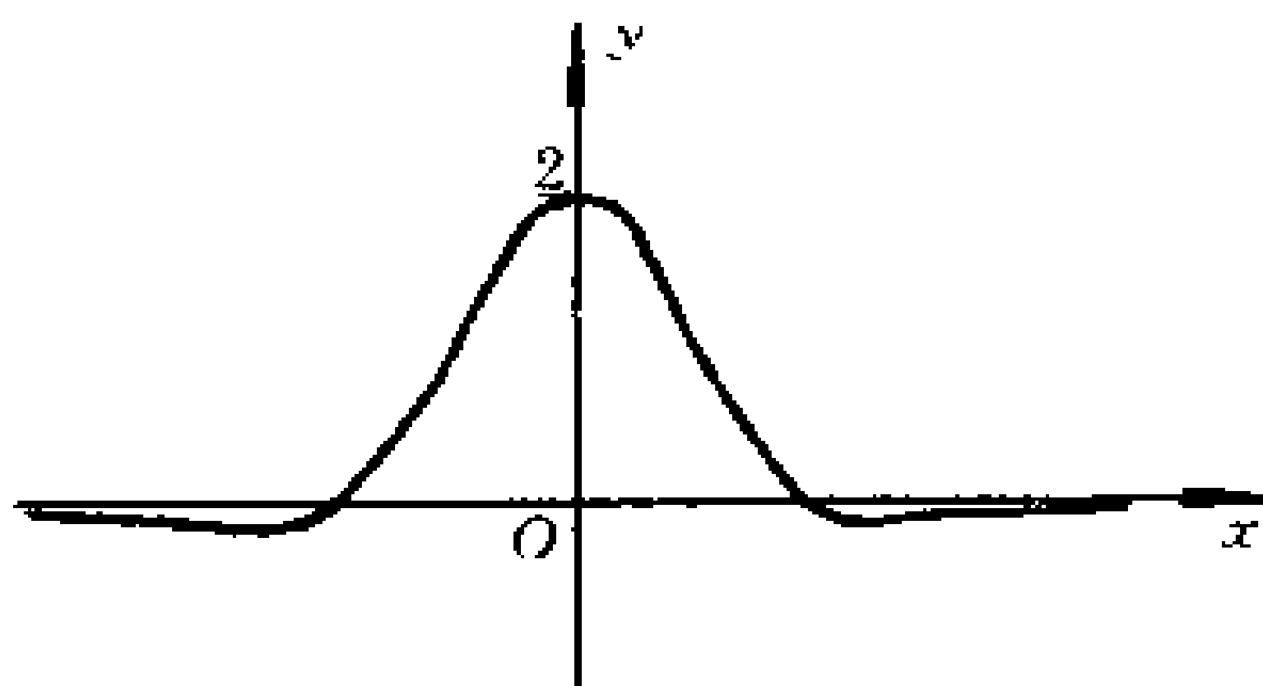


图 2.63

1475.  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}.$

**解** 零点处:  $x = -1$  及  $x = 1$ .

渐近线:  $x = 2, x = 3$  和  $y = 1$ .

$$y' = \frac{-5x^2 + 14x - 5}{(x^2 - 5x + 6)^2},$$

$$y'' = \frac{2(5x^3 - 21x^2 + 15x + 17)}{(x^2 - 5x + 6)^3}.$$

令  $y' = 0$  得  $x \approx 0.42, x \approx 2.38$ . 令  $y'' = 0$  得  $x \approx -0.586$ . 经判别知:  $y|_{x \approx 0.42} \approx -0.20$  为极小值,  $y|_{x \approx 2.38} \approx -19.80$  为极大值;  $x \approx -0.586, y \approx -0.07$  为拐点. 由于

$$y = 1 - \frac{3}{x-2} + \frac{8}{x-3},$$

故可用图形相加法作出函数的图形(图 2.64).

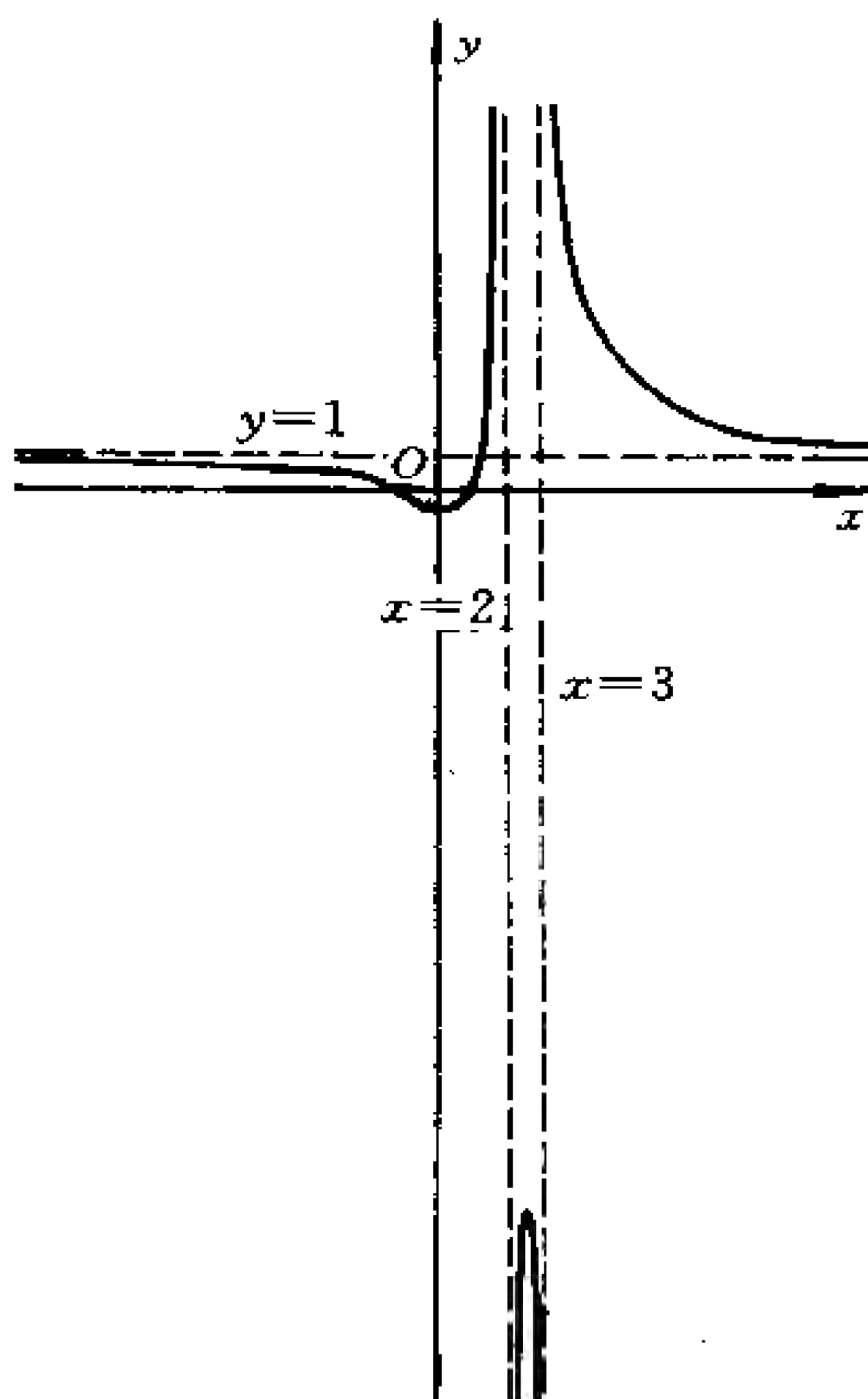


图 2.64

1476.  $y = \frac{x}{(1+x)(1-x)^2}$ .

解 零点处:  $x = 0$ . 不连续点:  $x = -1$  及  $x = 1$ . 渐近线:  $y = 0$ ,  $x = -1$  和  $x = 1$ .

$$y' = \frac{2x^2 + x + 1}{(1+x)^2(1-x)^3},$$

$$y'' = \frac{2(3x^3 + 3x^2 + 5x + 1)}{(1+x)^3(1-x)^4},$$

$y' = 0$  无实根, 无极值点. 令  $y'' = 0$  得  $x \approx -0.22$ , 经判别知它为拐点, 此时  $y = -0.20$ .

当  $x < -1$  时,  $y' > 0$ , 曲线上升;

当  $-1 < x < 1$  时,  $y' > 0$ , 曲线上升;

当  $x > 1$  时,  $y' < 0$ , 曲线下降(图 2.65)

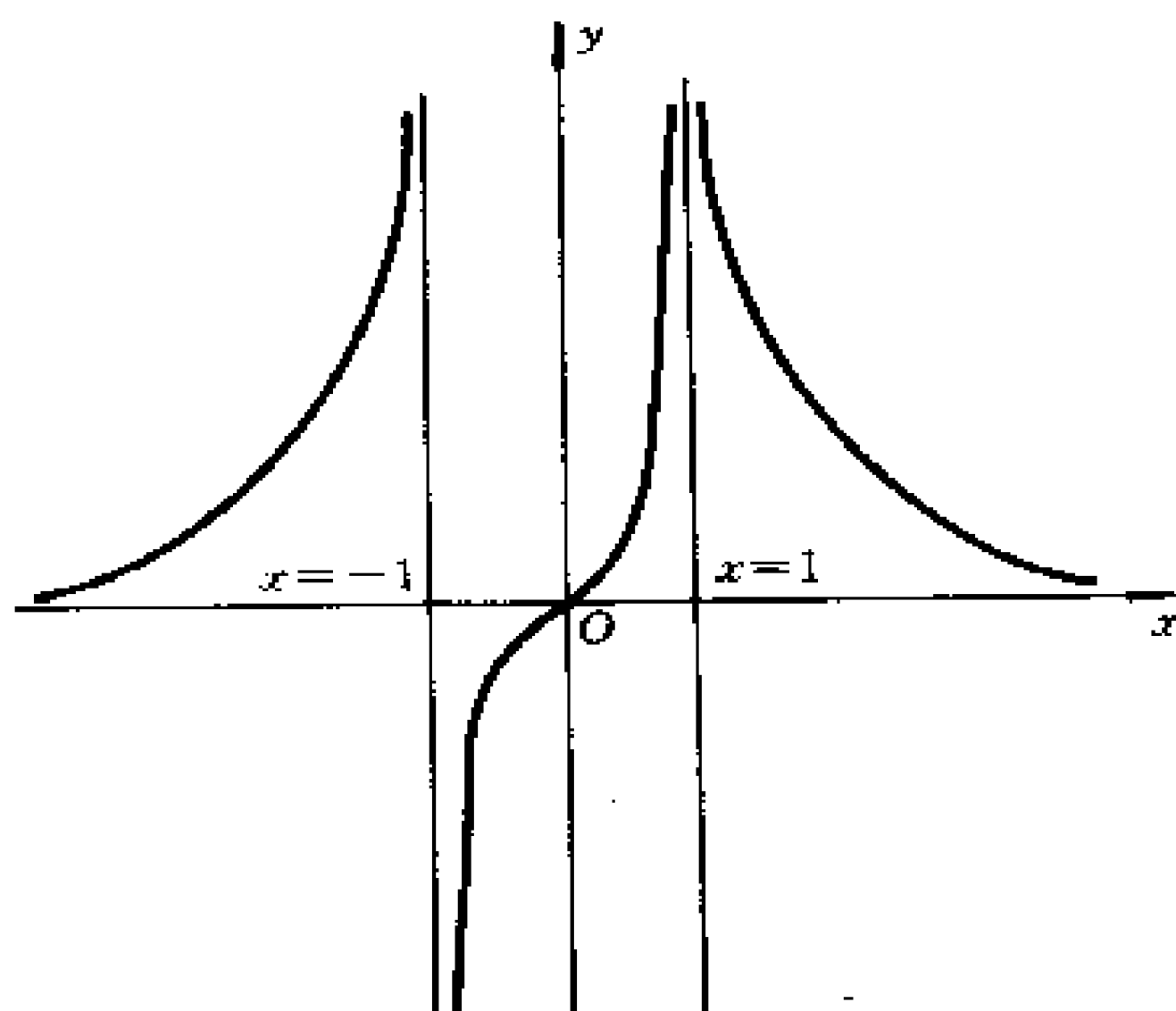


图 2.65

1477.  $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}.$

解 零点处:  $x = 0$ . 不连续点:  $x = -1$ .

斜渐近线:  $y = x - 3$ , 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = -3.$$

垂直渐近线:  $x = -1$ .

$$y' = \frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}.$$

令  $y' = 0$ , 得  $x = 0$ , 或  $x = -4$ .

$$y'' = \frac{12x^2}{(1+x)^5}.$$

当  $x < -1$  时,  $y'' < 0$ , 图形呈凸状;

当  $x > -1$  时,  $y'' > 0$ , 图形呈凹状;

又  $y''|_{x=-4} < 0$ ,

故当  $x = -4$  时有极大值

$$y = -9\frac{13}{27};$$

由于  $y'$  经过  $x = 0$  从负变到正, 故当  $x = 0$  时取得极小值  $y = 0$  (图 2.66)

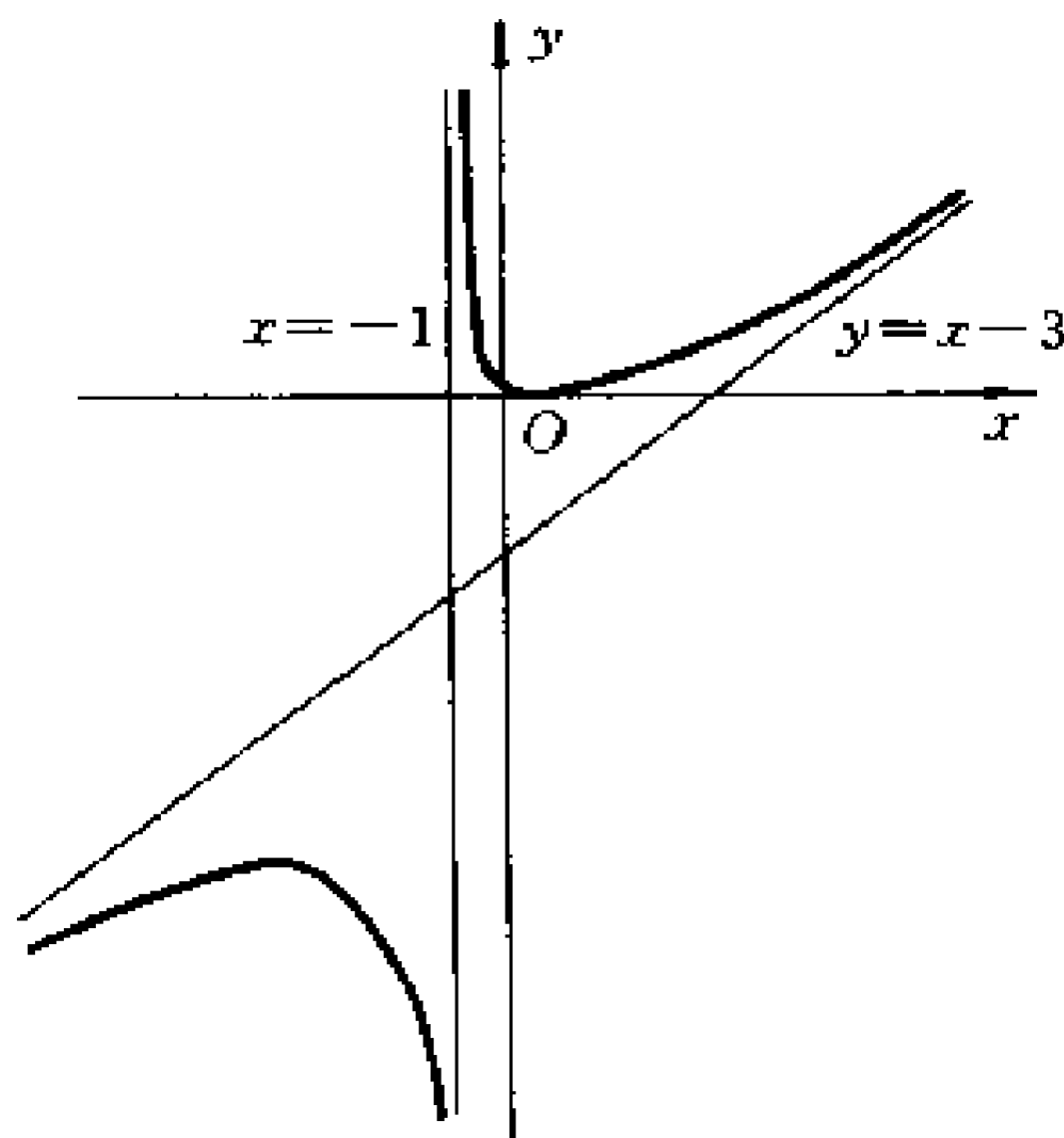


图 2.66



$$1478. y = \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^4.$$

解 零点处:  $x = -1$ .

垂直渐近线:  $x = 1$ ; 又

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 0, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = 1.$$

故还有水平渐近线为  $y = 1$ .

$$y' = \frac{8(1+x)^3}{(1-x)^5}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = -1;$$

$$y'' = \frac{16(x+1)^2(x+4)}{(1-x)^6}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = -1 \text{ 或}$$

$-4$ .

列表

$x$		$-4$		$-1$		$1$	
$y'$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$	$\infty$	$-$
$y''$	$-$	$0$	$+$	$0$	$+$	$\infty$	$+$
$y$	$\searrow$	拐点	$\searrow$	极小点	$\nearrow$	不连续点	$\searrow$

当  $x = -4$  时,  $y = \frac{81}{625}$ ;  $x = -1$  时,  $y = 0$ ;  $x = 0$  时,  $y = 1$  (图 2.67).

$$1479. y = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}.$$

解 零点处:  $x = 0$  及  $x = 1$ .

垂直渐近线:  $x = -1$ ;

斜渐近线:  $y = x - 3$ . 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = -3.$$

当  $x = 0$  时, 有极大值  $y = 0$ ;

当  $x = \frac{\sqrt{17} - 3}{2} \approx 0.56$  时, 有极小值

$$y = \frac{34\sqrt{17} - 142}{32} \approx -0.06;$$

当  $x = \frac{1}{5}$  时,  $y = -\frac{1}{45}$  (图 2.68).

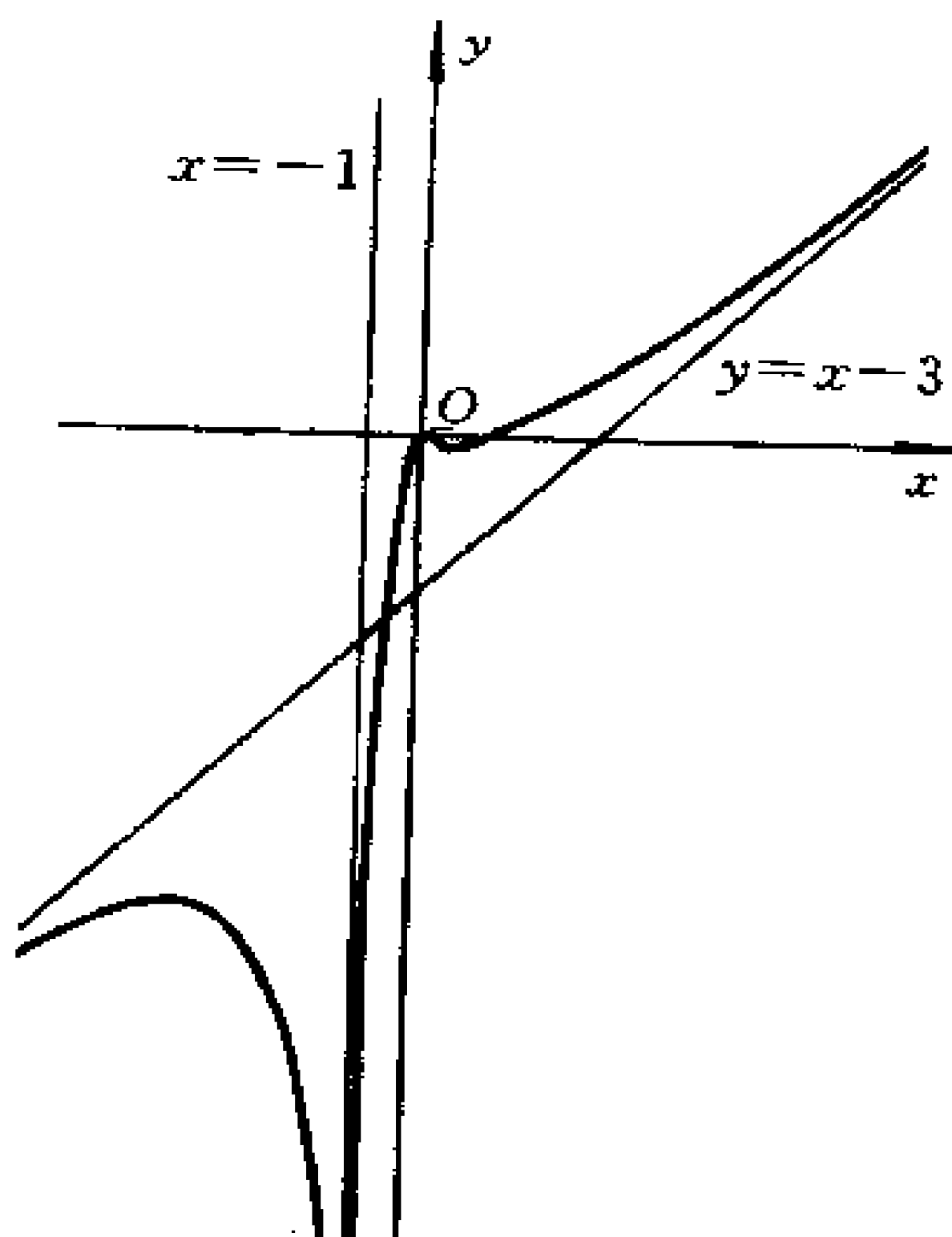


图 2.68

1480.  $y = \frac{x}{(1-x^2)^2}$ .

解 零点处:  $x = 0$ . 间断点:  $x = -1$  及  $x = 1$ .

渐近线:  $x = -1$ ,  $x = 1$  及  $y = 0$ .

以  $-x$  替代  $x$ ,  $y$  的绝对值不变, 符号改变, 故图形关于原点对称.

$$y' = \frac{3x^2 + 1}{(1 - x^2)^3}, \text{ 令 } y' = 0, \text{ 无实根.}$$

$$y'' = \frac{12x(x^2 + 1)}{(1 - x^2)^4}, \text{ 令 } y'' = 0, \text{ 得 } x = 0.$$

经判别知: 无极值,  $x = 0$  为拐点(图 2.69).

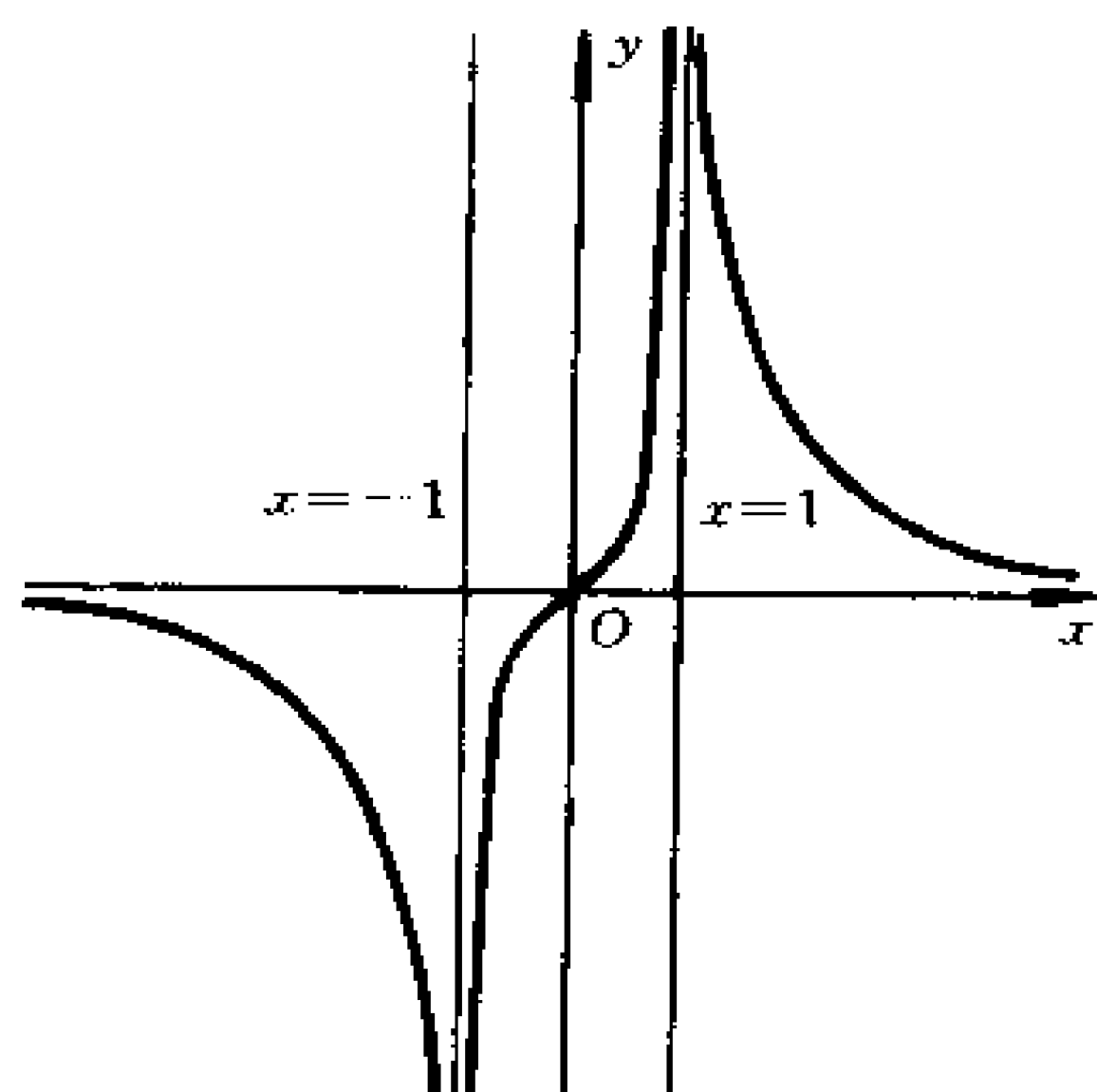


图 2.69

列表

$x$		$-1$		$0$		$1$	
$y'$	$-$	$\infty$	$+$	$+$	$+$	$\infty$	$-$
$y''$	$-$	$\infty$	$-$	$0$	$+$	$\infty$	$+$
$y$	$\searrow$	间断点	$\nearrow$	拐点	$\nearrow$	间断点	$\searrow$

$$1481. y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}.$$

**解** 零点处:  $x = -1$ . 间断点:  $x = 1$ .

垂直渐近线:  $x = 1$ ;

斜渐近线:  $y = x + 5$ . 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = 5.$$

$$y' = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = -1 \text{ 或 } 5.$$

$$y'' = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = -1.$$

列表

$x$		-1		1		5	
$y'$	+	0	+	$\infty$	-	0	+
$y''$	-	0	+	$\infty$	+	+	+
$y$	$\nearrow$	拐点	$\nearrow$	间断点	$\searrow$	极小点	$\nearrow$

当  $x = -1$  时,  $y = 0$ ;

当  $x = 5$  时,  $y = 13 \frac{1}{2}$  (图 2.70).

$$1482. y = \frac{x^4 + 8}{x^3 + 1}.$$

**解** 垂直渐近线:  $x = -1$ ;

斜渐近线:  $y = x$ . 事实上,

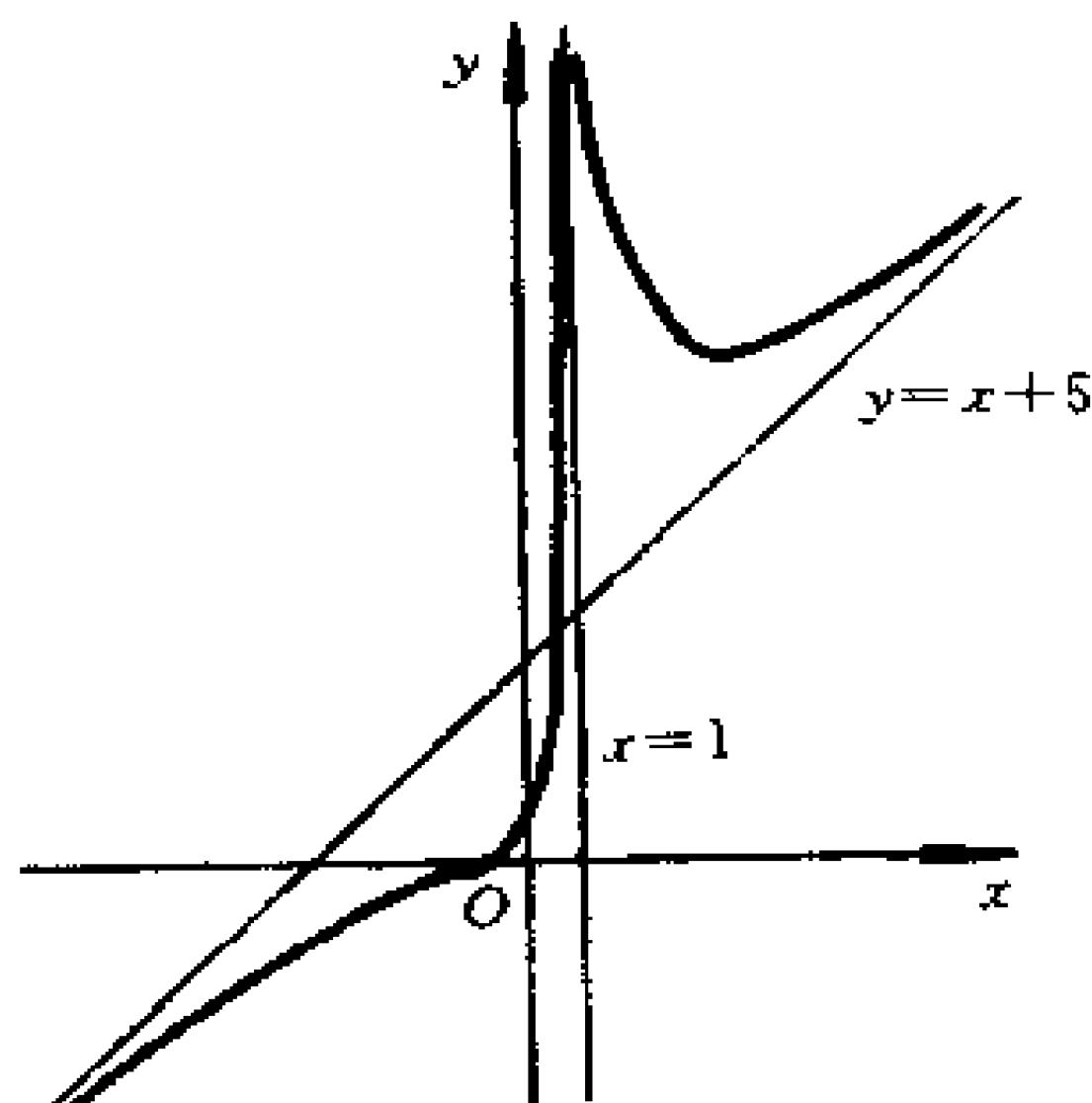


图 2.70

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = 0.$$

$$y' = \frac{x^6 + 4x^3 - 24x^2}{(x^3 + 1)^2},$$

$$y'' = \frac{-6x^5 + 96x^4 + 12x^2 - 48x}{(x^3 + 1)^3},$$

令  $y' = 0$ , 得  $x = 0, 2$  及  $x \approx -2.4$ .  $y' \big|_{x=2} > 0$ , 故当  $x$

$= 2$  时有极小值  $y = 2 \frac{2}{3}$ ;

$y'' \big|_{x=-2.4} < 0$ ; 故

当  $x \approx -2.4$  时有极

大值  $y \approx -3.2$ .

经判别知: 当

$x = 0, 0.752, 16.006$

时有拐点. 渐近线  $y = x$  与曲线交于点  $(8, 8)$ . 如图

2.71 所示.

$$1483. \quad y = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}.$$

**解** 图形对于  $Oy$  轴对称.

零点处:  $x = \pm$

$$\frac{\sqrt{10}}{4} \approx \pm 0.79.$$

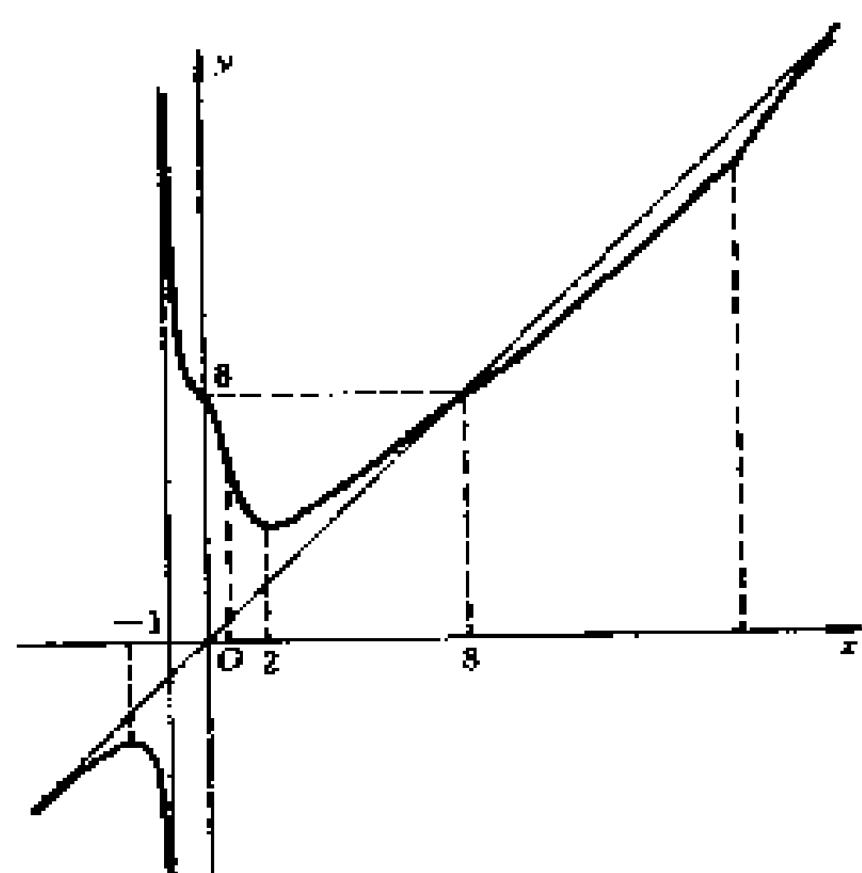


图 2.71

$y'$

$$\frac{4(8x^4 - 10x^2 + 5)}{3x^3(1-x^2)^2},$$

$y' = 0$  无实根, 无极值点.

$$y'' = \frac{4(8x^6 - 14x^4 + 15x^2 - 5)}{x^4(1-x^2)^3},$$

令  $y'' = 0$ , 得  $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \approx \pm 0.71$ . 经判别, 此为拐点, 相应纵坐标  $y = -2\frac{2}{3}$ .

渐近线:  $x = 0, x = -1, x = 1$  和  $y = 0$ .

当  $x > 0$  时,  $y' > 0$ , 曲线上升.

当  $0 < x < 0.71$  时,  $y'' < 0$ , 图形呈凸状.

当  $0.71 < x < 1$  时,  $y'' > 0$ , 图形呈凹状.

当  $1 < x < +\infty$  时,  $y'' < 0$ , 图形呈凸状.

图形如图 2.72 所示.

$$1484. \quad y = (x-3)\sqrt{x}.$$

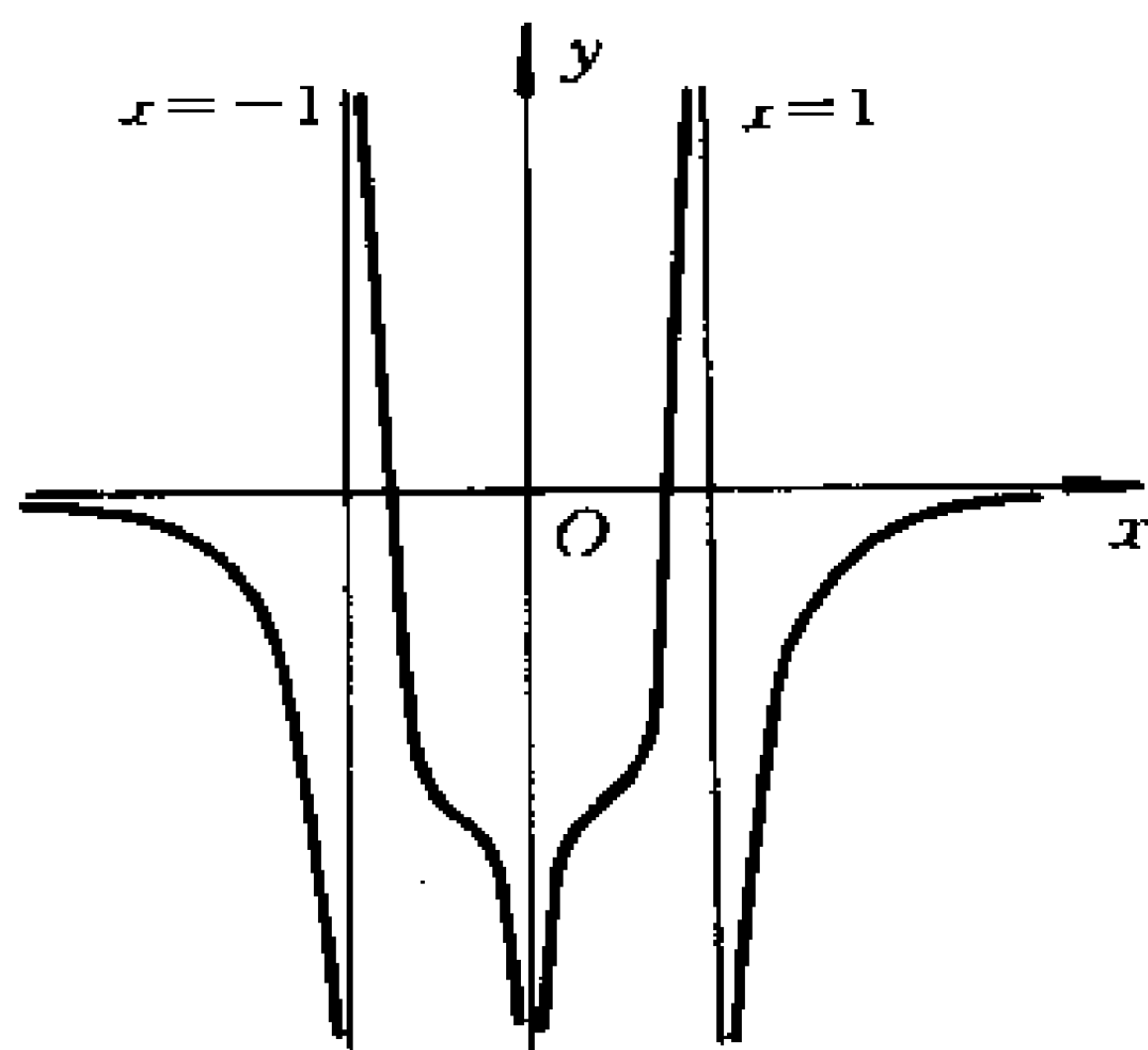


图 2.72

解 存在域:  $0 \leq x < +\infty$ .

零点处:  $x = 0$  和  $x = 3$ .

$$y' = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 1;$$

$$y'' = \frac{3(x+1)}{4x\sqrt{x}} > 0 \quad (0 < x < +\infty),$$

所以图形始终是凹的.

由于  $y''|_{x=1} > 0$ , 故当  $x = 1$  时有极小值  $y = -2$ ; 当  $x = 0$  时, 由  $\lim_{x \rightarrow 0+} y' = -\infty$  知, 曲线在  $x = 0$  点与  $y$  轴相切, 易见它有边界极大值  $y = 0$ .

图形如图 2.73 所示.

1485.  $y = \pm \sqrt{8x^2 - x^4}.$

解 存在域: 需  $8 - x^2 \geq 0$ , 即  $|x| \leq 2\sqrt{2} \approx 2.83$ .

零点处:  $x = 0$  和  $x = \pm 2\sqrt{2}$ .

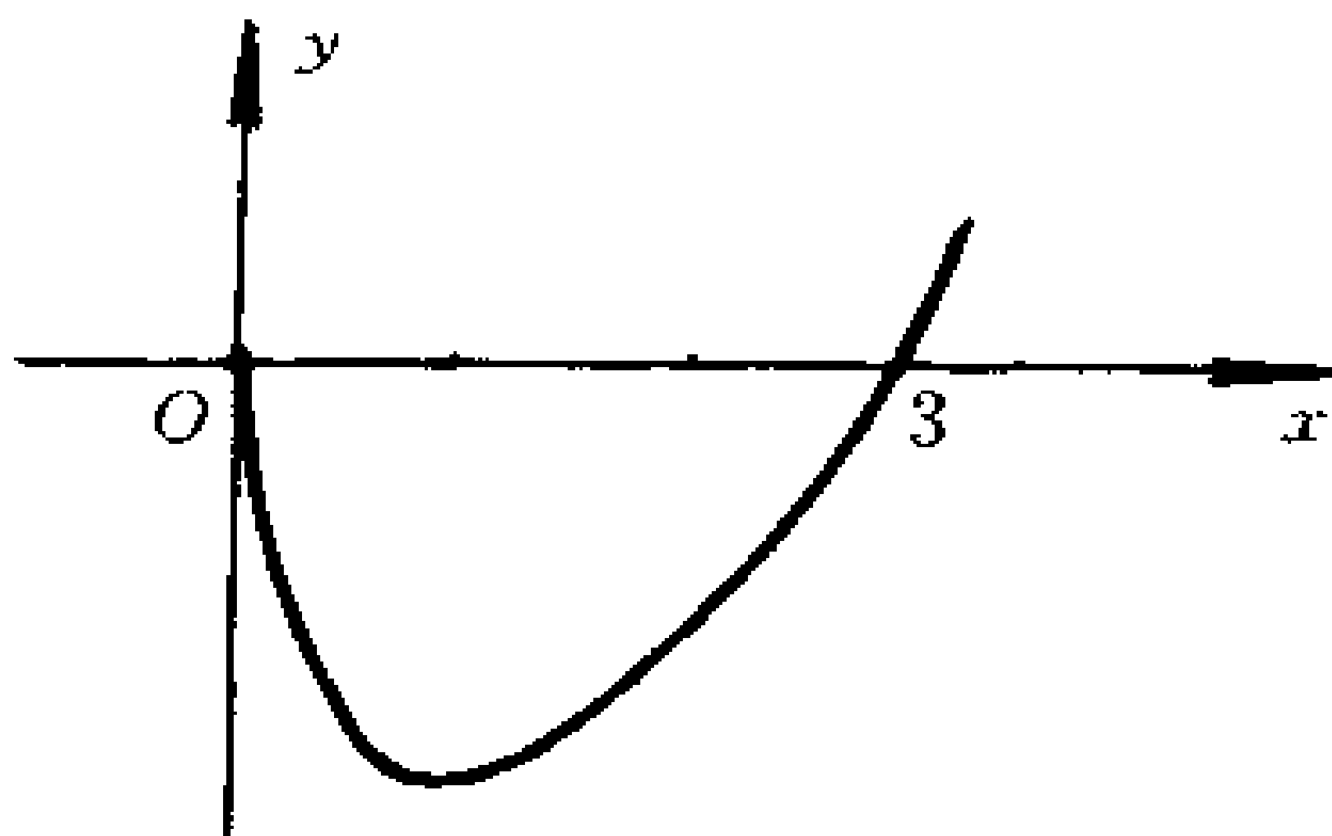


图 2.73

图形关于坐标原点及坐标轴对称.

下面就第一象限讨论之:

$$y' = \frac{2(4 - x^2)}{\sqrt{8 - x^2}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 2.$$

$$y'' = \frac{2x(x^2 - 12)}{(8 - x^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = 2\sqrt{3} \text{ 或 } x = 0.$$

然而点  $x = 2\sqrt{3}$  不在存在域内, 对于  $x = 0$  来说, 如果将曲线由第三象限穿向第一象限看成一分支曲线的话, 则也可理解为拐点, 同样由第四象限到第二象限的那个分支也有同样情况, 故曲线呈双纽状.

当  $0 < x < 2$  时,  $y' > 0$ , 当  $2 < x < 2\sqrt{2}$  时,  $y' < 0$ , 故当  $x = 2$  时, 有极大值  $y = 4$ . 当  $x = 2\sqrt{2}$  及  $x = 0$  时, 显然有极小值  $y = 0$ .

前者是边界的极小值, 而且曲线在  $x = 2\sqrt{2}$  处以  $x = 2\sqrt{2}$  为垂直切线. 图形如图 2.74 所示.



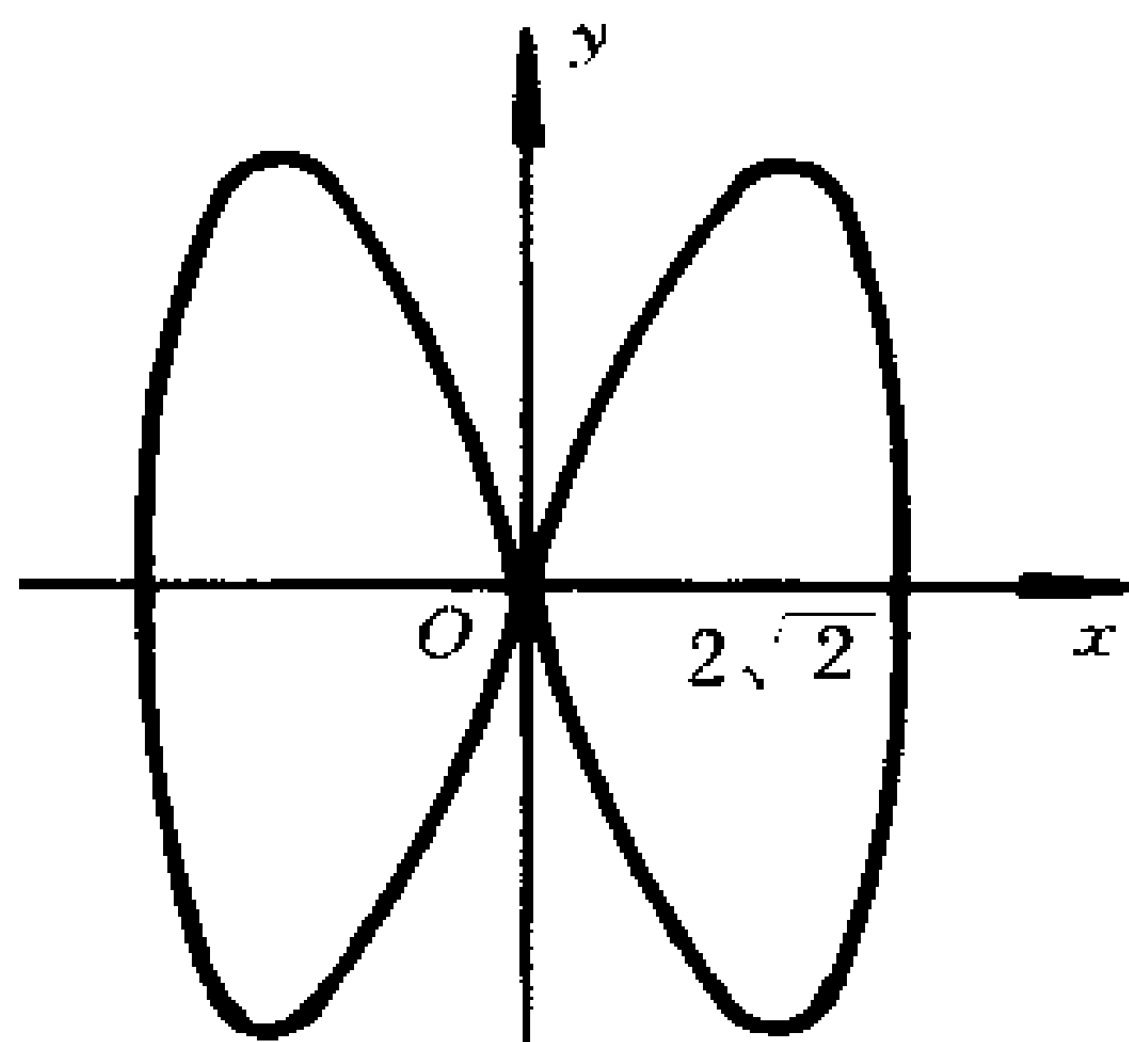


图 2.74

1486.  $y = \pm \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}.$

解 存在域:  $1 \leq x \leq 2$  及  $3 \leq x < +\infty.$

零点处:  $x = 1, x = 2$  和  $x = 3.$

图形关于  $Ox$  轴对称, 下面就第一象限讨论之:

$$y' = \frac{3x^2 - 12x + 11}{2\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}}, \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得 } x$$

$$= \frac{6 - \sqrt{3}}{3} \approx 1.42 \text{ 经判别此时有极大值 } |y| = \frac{1}{3}$$

$$\cdot \sqrt[3]{12} \approx 0.62.$$

令  $y = 0$  解得  $x = 3.468$ , 经判别是拐点.

当  $x > 3$  时,  
 $y' > 0$ , 曲线上  
 升.

当  $x = 1, 2$

和 3 时有边界  
的极小值  $y = 0$   
且  $y' = \infty$  (图  
2.75).

1487.  $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$ .

**解** 零点处:  $x = -1$  和  
 $x = 1$ . 又当  $x = 0$  时,  $y =$   
1.

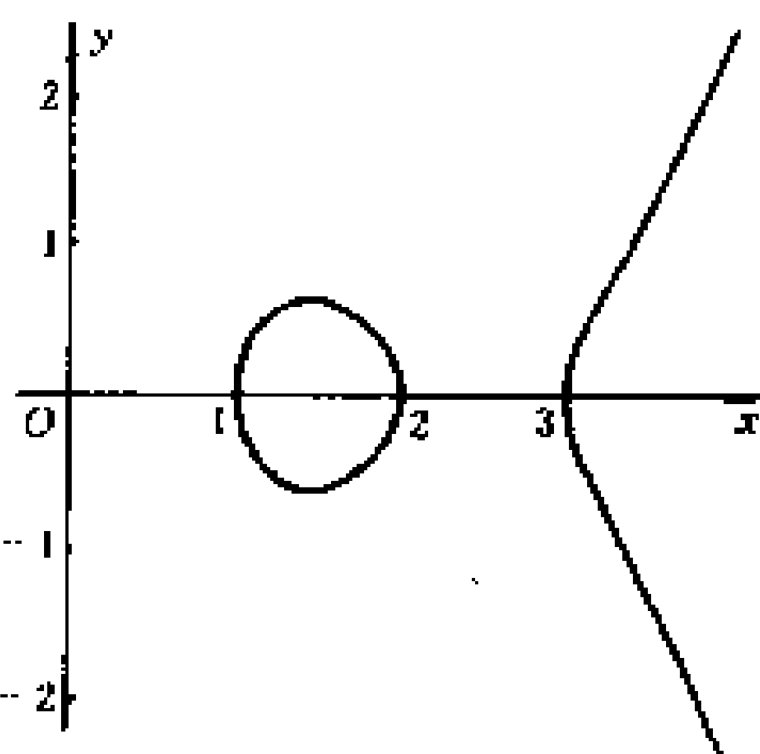


图 2.75

渐近线:  $y = x - \frac{1}{3}$ .

事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = -\frac{1}{3}.$$

$$y' = \frac{3x^2 - 2x - 1}{3 \sqrt[3]{(x^3 - x^2 - x + 1)^2}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = -\frac{1}{3}; \text{ 当 } x = \pm 1 \text{ 时, } y' = \infty.$$

$$y'' = \frac{-8}{9} \cdot \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}}}, \text{ 当 } x = \pm 1 \text{ 时, } y'' = \infty.$$

列表

$x$		-1		$-\frac{1}{3}$		1	
$y'$	+	$\infty$	+	0	-	$\infty$	+
$y''$	+	$\infty$	-	-	-	$\infty$	-
$y$	$\nearrow$	拐点	$\nearrow$	极大点	$\searrow$	极小点	$\nearrow$

当  $x = -\frac{1}{3}$  时,

1489.  $y = (x + 2)^{\frac{2}{3}} - (x - 2)^{\frac{2}{3}}$ .

**解** 以  $-x$  替代  $x$ ,  $y$  变成  $-y$ , 故图形关于坐标原点对称.

渐近线:  $y = 0$ .

零点处:  $x = 0$ .

$$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x - 2)^{\frac{1}{3}} - (x + 2)^{\frac{1}{3}}}{(x + 2)^{\frac{1}{3}}(x - 2)^{\frac{1}{3}}}, \text{ 当 } x = \pm 2 \text{ 时, } y' = \infty.$$

$$y'' = \frac{2}{9} \cdot \frac{(x + 2)^{\frac{1}{3}} - (x - 2)^{\frac{1}{3}}}{(x + 2)^{\frac{4}{3}}(x - 2)^{\frac{4}{3}}}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = 0.$$

列表

$x$		$-2$		$0$		$2$	
$y'$	$-$	$\infty$	$+$	$+$	$+$	$\infty$	$-$
$y''$	$-$	$\infty$	$-$	$0$	$+$	$\infty$	$+$
$y$	$\searrow$	最小点	$\nearrow$	拐点	$\nearrow$	最大点	$\searrow$

当  $x = -2$  时, 有最小值  $y = -\sqrt[3]{16}$ ;

当  $x = 2$  时, 有最大值  $y = \sqrt[3]{16}$ .

图形如图 2.78 所示.

1490.  $y = (x + 1)^{\frac{2}{3}} + (x - 1)^{\frac{2}{3}}$ .

**解** 图形关于  $Oy$  轴对称.

$$y' = \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{(x + 1)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{(x - 1)^{\frac{1}{3}}} \right], \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 0; \text{ 当 } x = \pm 1 \text{ 时, } y' = \infty.$$

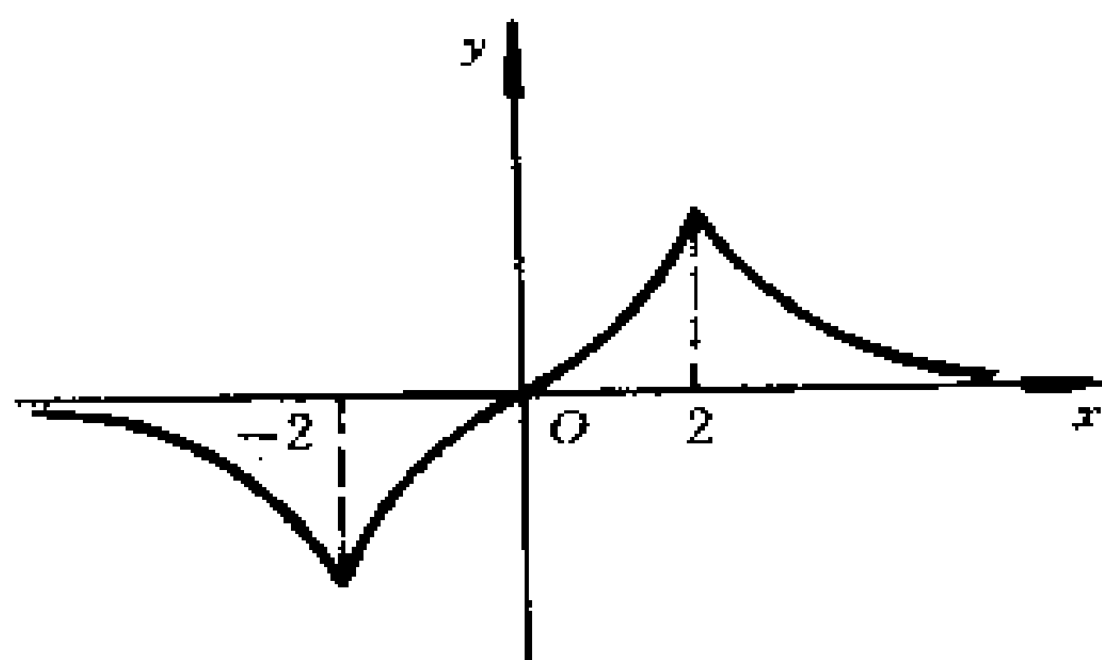


图 2.78

$$y'' = -\frac{2}{9} \left[ \frac{1}{(x+1)^{4/3}} + \frac{1}{(x-1)^{4/3}} \right] < 0,$$

图形始终呈凸状.

当  $x = \pm 1$  时, 取得  
最小值  $y = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$ .

当  $x = 0$  时, 有极大  
值  $y = 2$ .

图形如图 2.79 所示.

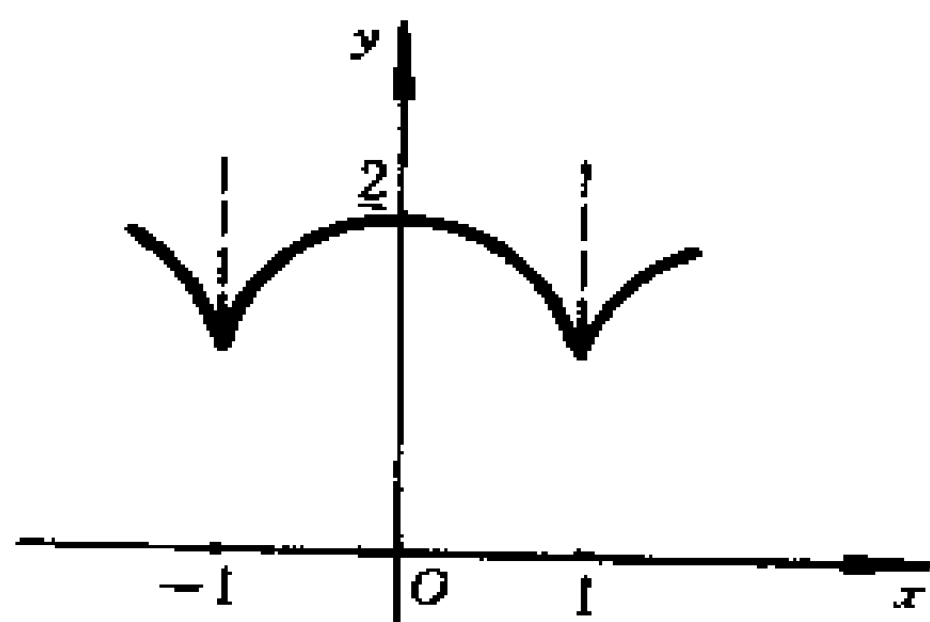


图 2.79

1491.  $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$

**解** 图形关于坐标原点  
对称.

零点处:  $x = 0$ .

间断点:  $x = \pm 1$ .

$y' = \frac{x^2 - 3}{3(x^2 - 1)^{4/3}}$ , 令  $y' = 0$  得  $x = \pm \sqrt{3}$ . 当  $x = \pm 1$  时,  $y' = \infty$ .

$y'' = -\frac{2x(x^2 - 9)}{9(x^2 - 1)^{7/3}}$ , 令  $y'' = 0$  得  $x = 0$  或  $\pm 3$ .

列表

$x$		-3		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		3	
$y'$	+	+	+	0	-	$\infty$	-	-	-	$\infty$	-	0	+	+	+
$y''$	+	0	-	-	-	$\infty$	+	0	-	$\infty$	+	+	+	0	-
$y$	↗	拐点	↗	极大点	↘	间断点	↘	拐点	↘	间断点	↘	极小点	↗	拐点	↗

渐近线:  $x = -1, x = 1$ .

当  $x = \pm \sqrt{3}$  时,  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \approx \pm 1.38$ ;

当  $x = \pm 3$  时,  $y = \pm 1\frac{1}{2}$ .

图形如图 2.80 所示.

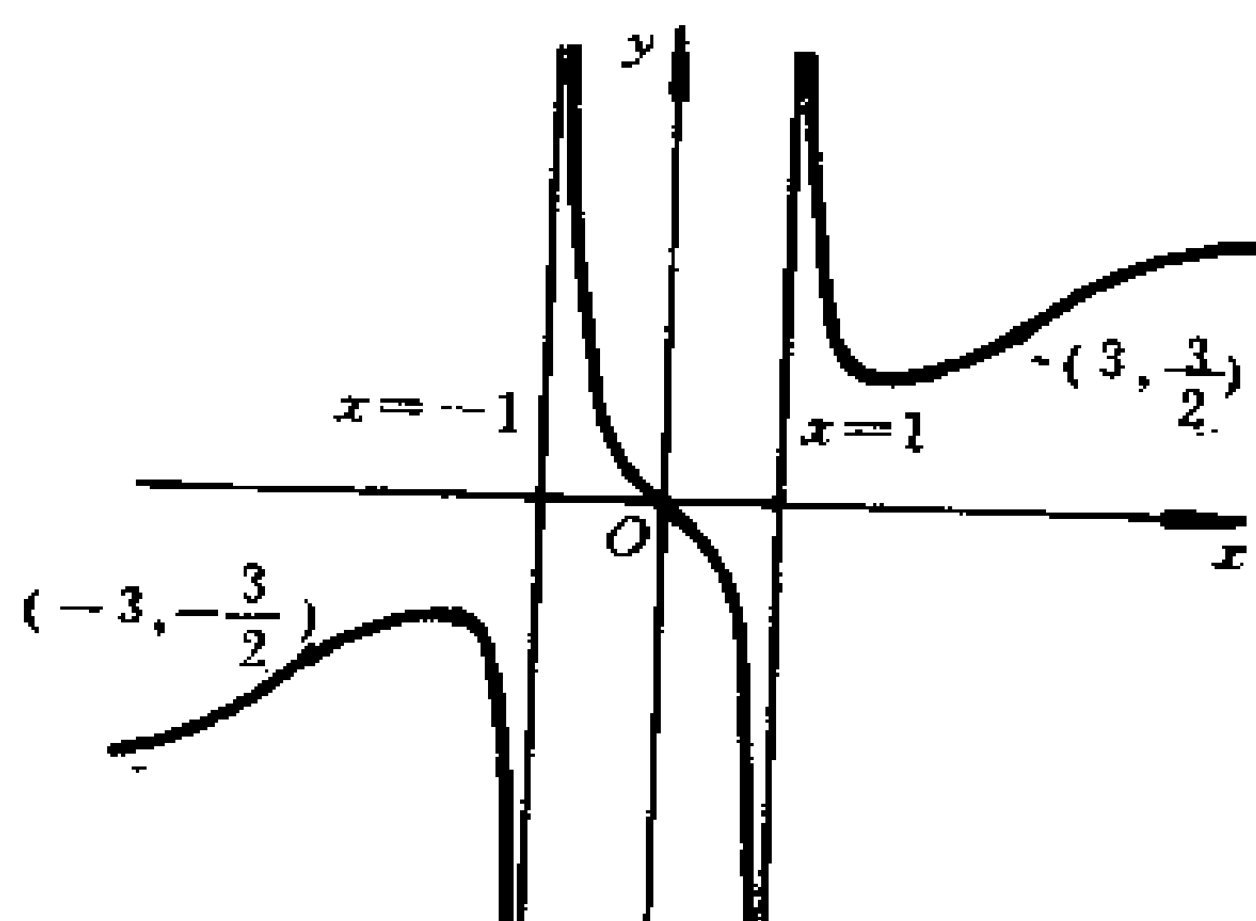


图 2.80

1492.  $y = \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{2x^2 - 1}.$

**解** 存在域:  $|x| \geq 1$ . 图形关于  $Oy$  轴对称, 且位于  $Ox$  轴的上方. 渐近线:  $y = \pm \frac{x}{2}.$

$$y' = \frac{2x^5 - 3x^3 + 2x}{(2x^2 - 1)^2 \sqrt{x^2 - 1}},$$

$$y'' = \frac{1}{(2x^2 - 1)^3 (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot (-6x^4 + 3x^2 + 2).$$

当  $x > 1$  时,  $y' > 0, y'' < 0$ , 故曲线上升, 图形呈凸状.

又当  $x = \pm 1$  时, 有边界的极小点  $y = 0$  (图 2.81).

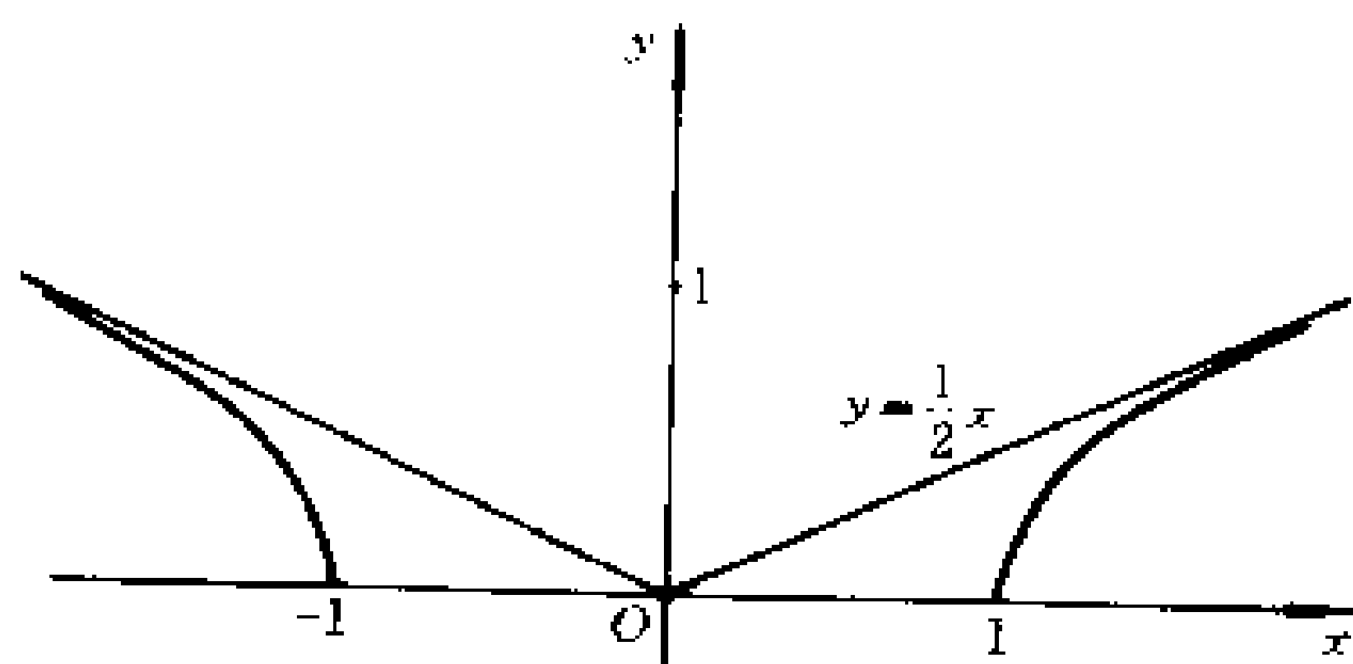


图 2.81

1493.  $y = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}.$

**解** 存在域:  $x > 0$ .

渐近线:  $x = 0$  及  $y = x + \frac{3}{2}.$

$$y' = \frac{(2x-1)\sqrt{x+1}}{2x\sqrt{x}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = \frac{1}{2}.$$

$$y'' = \frac{3}{4x^{\frac{5}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}}} > 0,$$

故图形是凹的.

当  $x = \frac{1}{2}$  时, 有极小值

$$y = \frac{3}{2} \sqrt{3} \approx 2.60.$$

图形如图 2.82 所示.

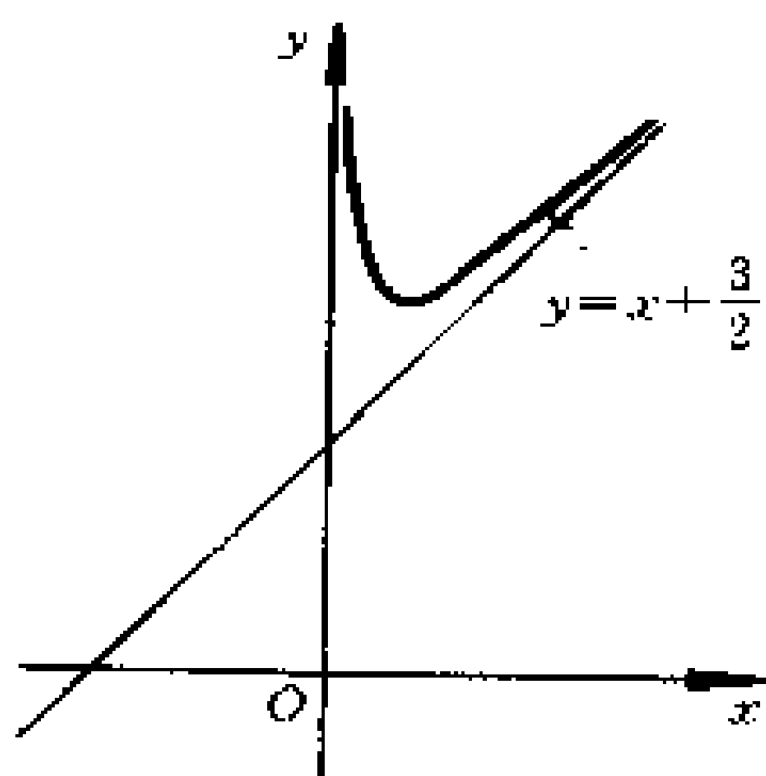


图 2.82

1494.  $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}.$

**解** 存在域:  $x \geq 0$

及  $x < -3$ .

零点处:  $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \approx 4.30.$

斜渐近线:  $y = \frac{5}{2} - 2x$ . 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = -2.$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - (x+1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x - 1} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

水平渐近线:  $y = -\frac{1}{2}$ . 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - (x-1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+1} + x - 1}} \\
 &= -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

由于  $\lim_{x \rightarrow -3} y = \infty$ , 故垂直渐近线为  $x = -3$ .

$$\begin{aligned}
 y' &= -1 + \frac{\sqrt{x}(2x+9)}{2(x+3)^{\frac{3}{2}}}, \\
 \text{令 } y' &= 0 \text{ 得 } x \\
 &= -4;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y'' &= \frac{27}{4(x+3)^2 \sqrt{x(x+3)}} \\
 &> 0, \text{ 故图形呈凹状.}
 \end{aligned}$$

当  $x = -4$  时有极小值  $y = 13$ .

当  $x = 0$  时有边界极大值  $y = 1$ .

图形如图 2.83 所示.

1495.  $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}.$

**解** 零点处:  $x = 0$ .

垂直渐近线:  $x = -1$ .

$$y' = \frac{x+2}{3(x+1) \sqrt[3]{x(x+1)}},$$

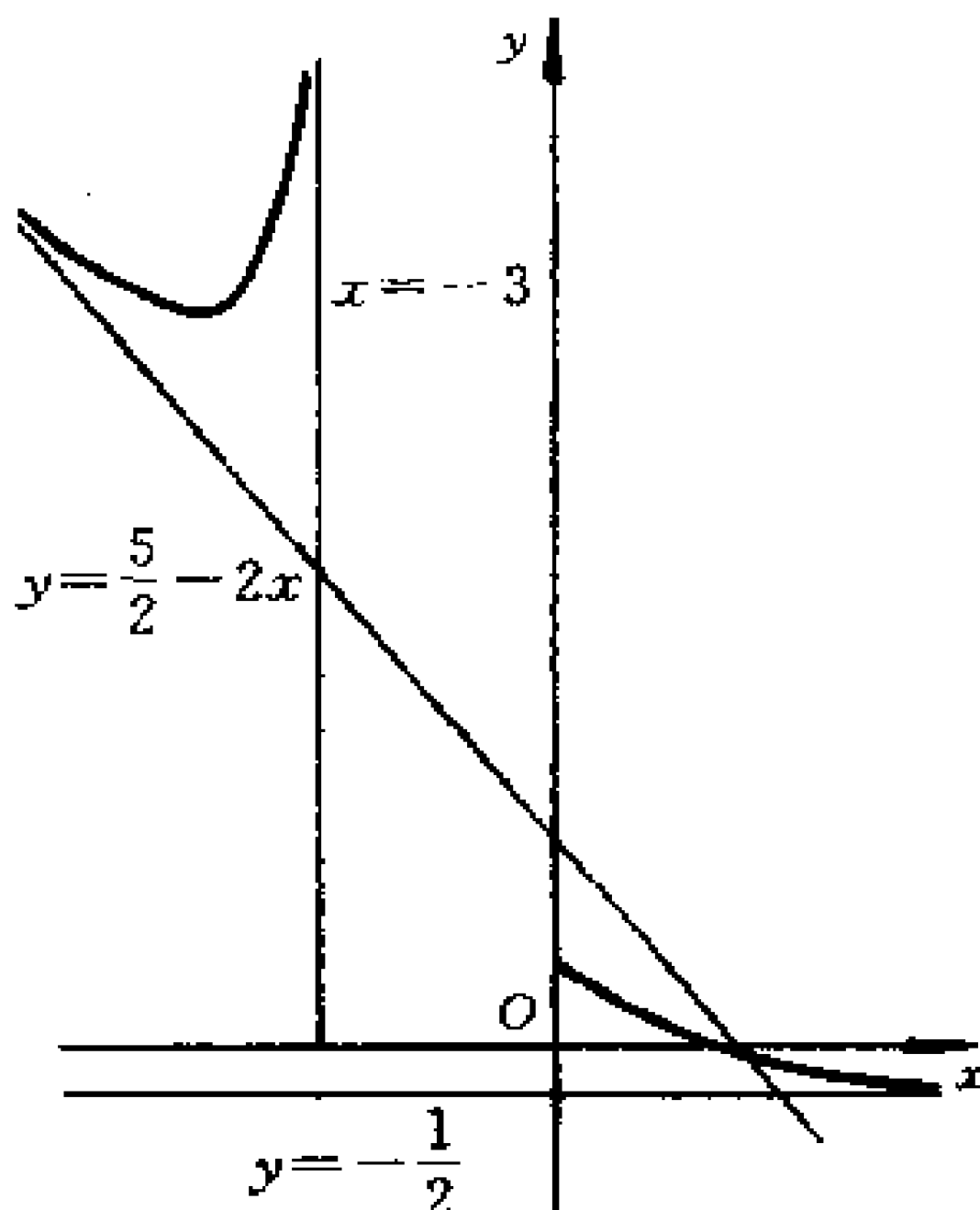


图 2.83



令  $y' = 0$  得  $x = -2$ . 当  $x = 0$  时  $y' = \infty$ .

$$y'' = -\frac{2(x^2 + 4x + 1)}{9x(x+1)^2 \sqrt[3]{x(x+1)}},$$

令  $y'' = 0$  得  $x = -2 \pm \sqrt{3}$ .

经判别:

当  $x = 0$  时有  
极小值  $y = 0$ ;

当  $x = -2$  时有  
极大值  $y = -\sqrt[3]{4}$   
 $\approx -1.59$ .

拐点:

$x = -(2 - \sqrt{3})$   
 $\approx -0.27$ , 此时  $y$   
 $\approx 0.46$ ;  
 $x = -(2 + \sqrt{3})$   
 $\approx -3.73$ , 此时  $y \approx -1.72$ .

图形如图 2.84 所示.

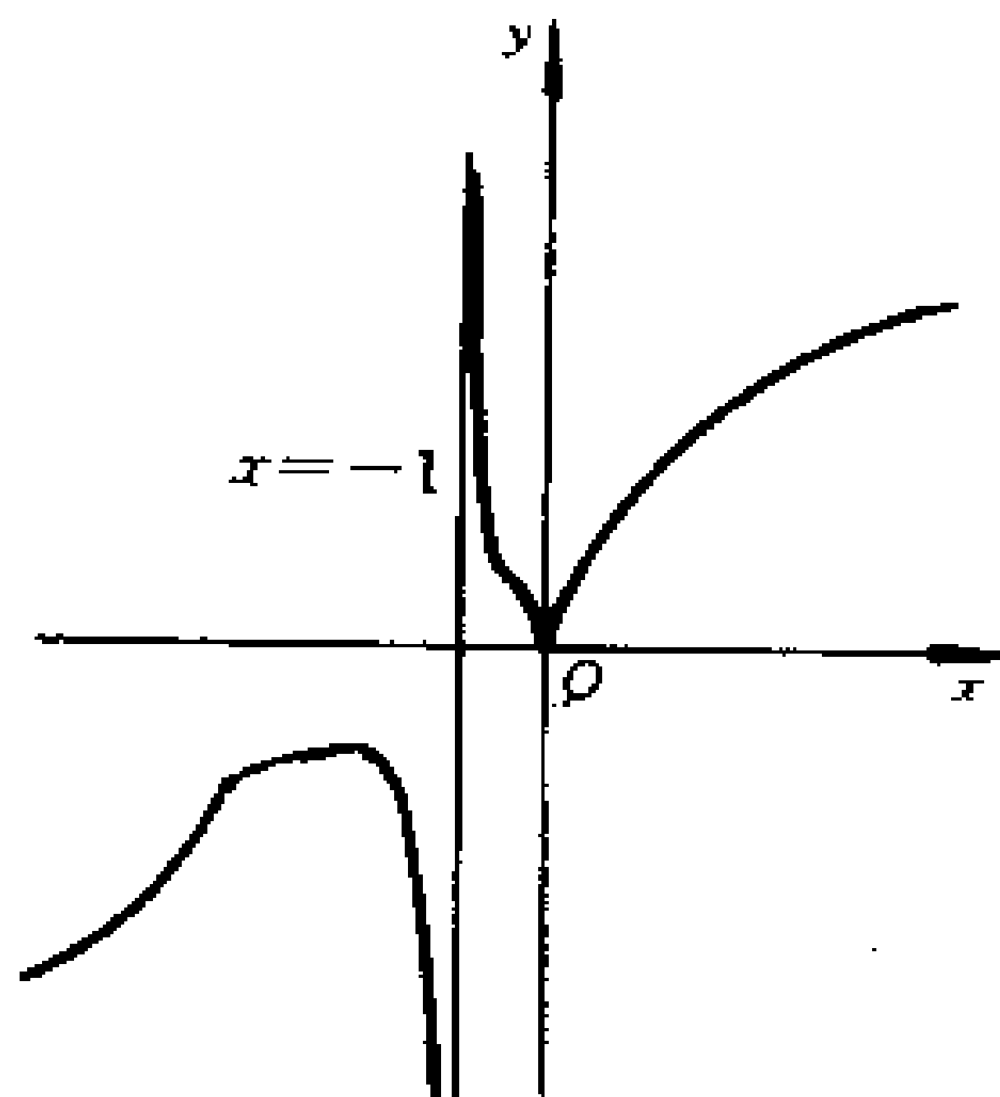


图 2.84

1496.  $y = \sqrt{\frac{x^4 + 3}{x^2 + 1}}.$

解 图形关于  $Oy$  轴对称. 函数值始终是正的.

渐近线:  $y = \pm x$ .

$$y' = \frac{x(x-1)(x+1)(x^2+3)}{(x^4+3)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$

令  $y' = 0$  得  $x = 0$  或  $\pm 1$ .

$$y'' = \frac{-x^8 + 20x^6 + 18x^4 + 36x^2 - 9}{(x^4 + 3)^{\frac{5}{2}}(x^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}.$$

令  $y'' = 0$  得  $x \approx \pm 0.47$  或  $\pm 4.58$ , 经判别均为拐点:

当  $x \approx \pm 0.47$  时,  $y \approx 1.58$ ;

当  $x \approx \pm 4.58$  时,  $y \approx 4.49$ .

当  $x = 0$  时有极大值  $y = \sqrt{3} \approx 1.73$ ;

当  $x = \pm 1$  时有极小值  $y = \sqrt{2} \approx 1.41$ .

图形如图 2.85 所示.

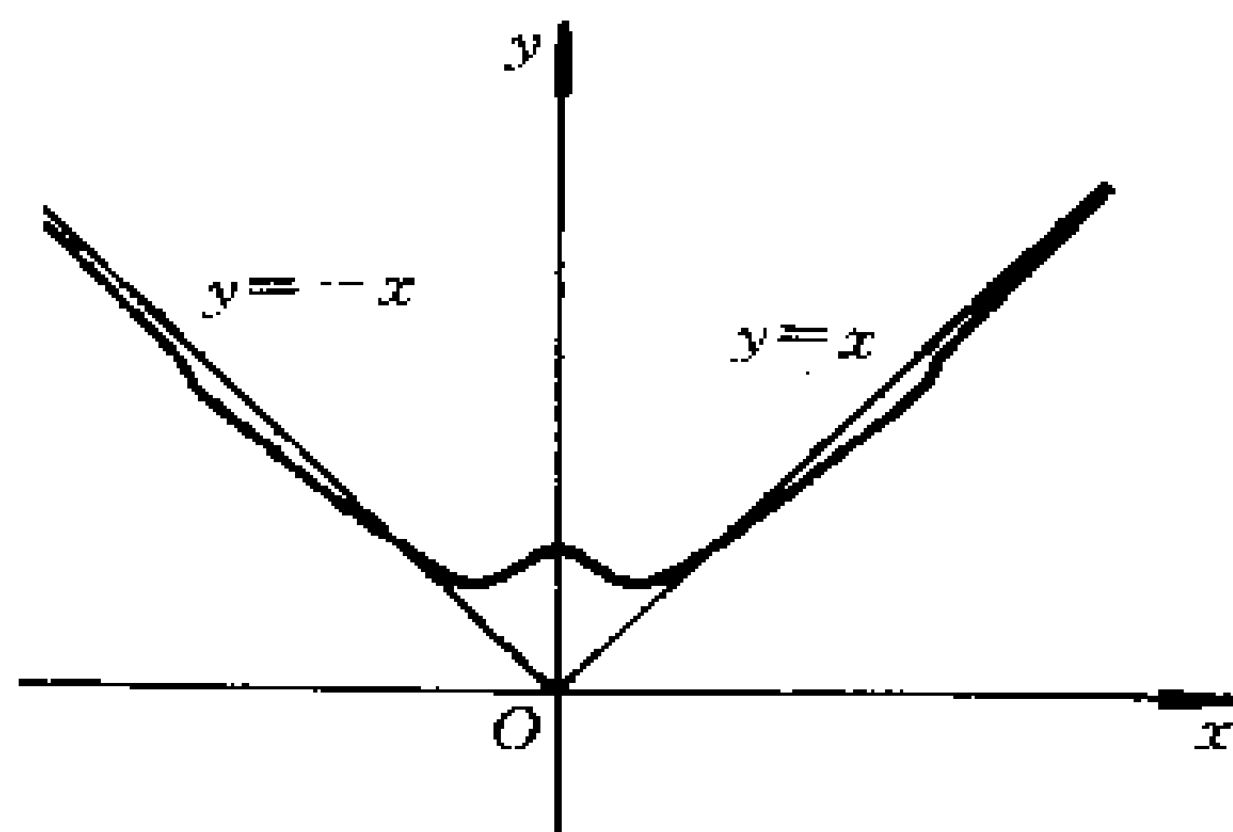


图 2.85

1497.  $y = \sin x + \cos^2 x$ .

**解** 函数的周期  $T = 2\pi$ . 在一周期  $0 \leq x \leq 2\pi$  内的图形讨论如下:

零点处:  $x = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1.21\pi$  及

$x = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1.79\pi$ .

$y' = \cos x(1 - 2\sin x)$ , 令  $y' = 0$  得

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \text{ 及 } \frac{3\pi}{2};$$

$y'' = -\sin x - 2\cos 2x$ , 令  $y'' = 0$  得

$$4\sin^2 x - \sin x - 2 = 0,$$

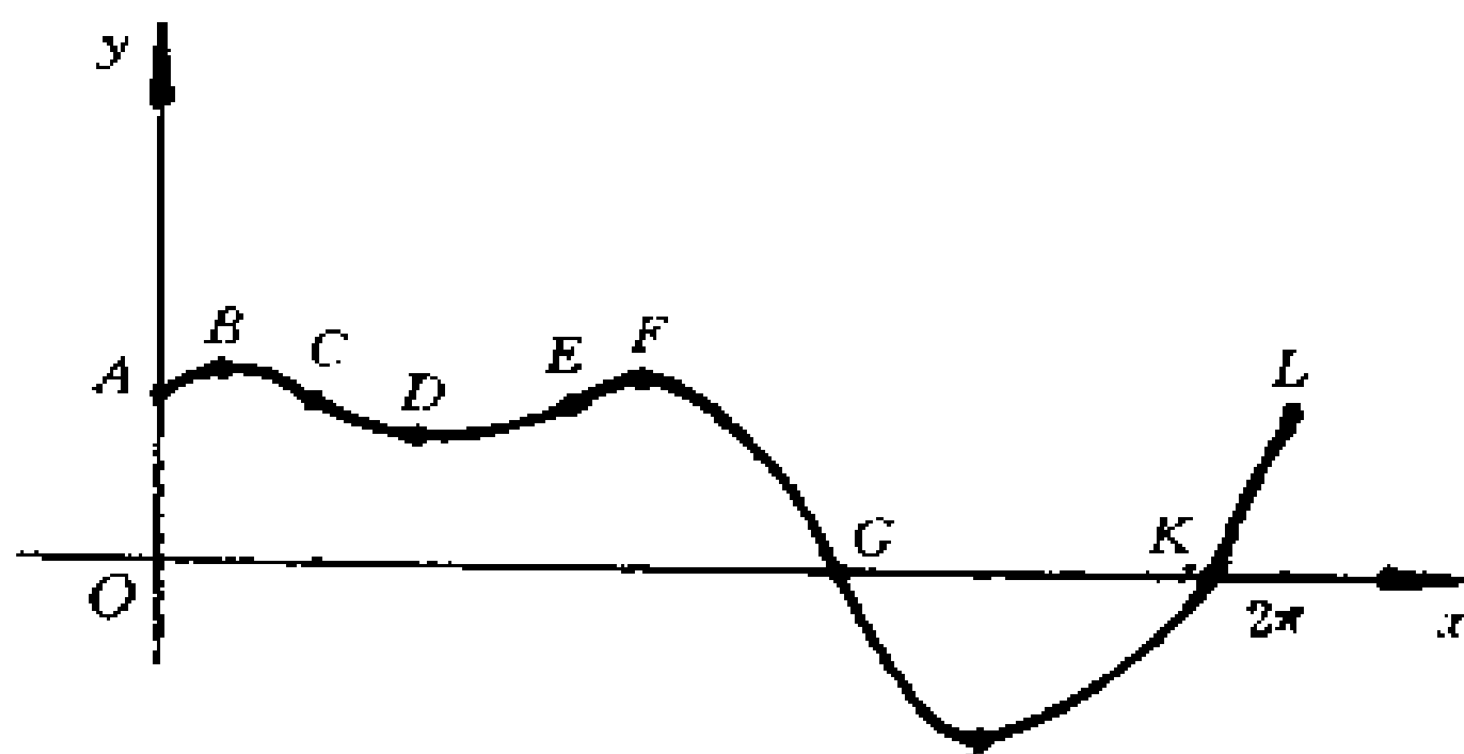


图 2.86

解之得

$$x_1 = \arcsin \frac{1 + \sqrt{33}}{8}, \text{ 此时 } y_1 \approx 1.13;$$

$$x_2 = \pi - \arcsin \frac{1 + \sqrt{33}}{8}, \text{ 此时 } y_2 \approx 1.13;$$

$$x_3 = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{33} - 1}{8}, \text{ 此时 } y_3 \approx 0.055;$$

$$x_4 = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{33} - 1}{8}, \text{ 此时 } y_4 \approx 0.055,$$

经判断:  $x_1 \approx 0.32\pi$ ,  $x_2 \approx 0.68\pi$ ,  $x_3 \approx 1.20\pi$ ,  $x_4 \approx 1.80\pi$  均为拐点;

当  $x = \frac{\pi}{2}$  时有极小值  $y = 1$ ;

当  $x = \frac{3\pi}{2}$  时有极小值  $y = -1$ ;

$$y_{2,3} \approx \pm 2.54;$$

$$x_{4,5} = \pm \pi, \text{ 此时 } y_{4,5} = 0.$$

经判别: 点  $x_1, x_2, x_3, x_4$  和  $x_5$  均为拐点;

当  $x = -\arccos \frac{1}{4}$  时有

$$\text{极小值 } y = -\frac{15}{8} \sqrt{15} \approx -7.3;$$

当  $x = \arccos \frac{1}{4}$  时有极

$$\text{大值 } y = \frac{15}{8} \sqrt{15} \approx 7.3.$$

图形如图 2.87 所示, 图中主要点的坐标:

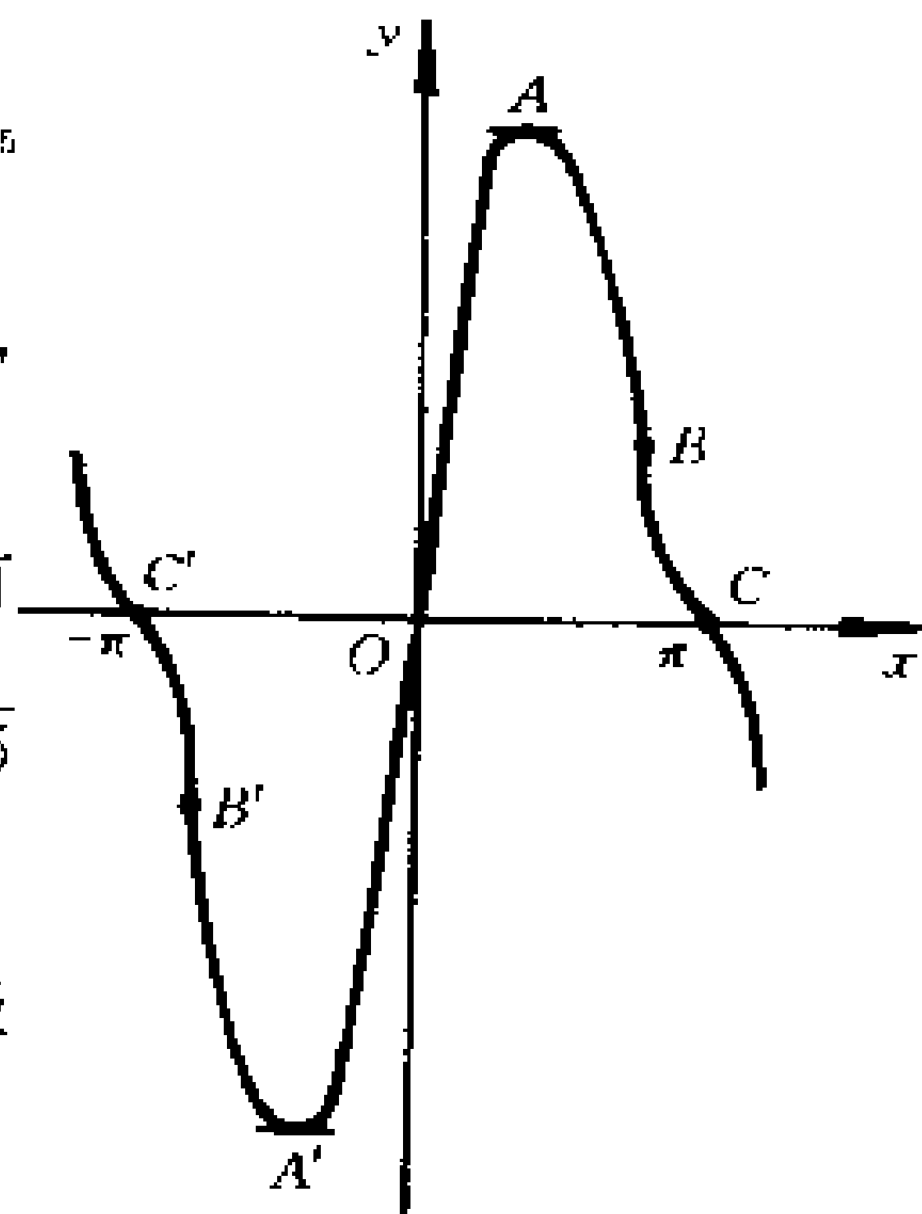


图 2.87

$$A(0.42\pi, 7.3), B(0.84\pi, 2.54), C(\pi, 0);$$

$$A'(-0.42\pi, -7.3), B'(-0.84\pi, -2.54),$$

$$C'(-\pi, 0).$$

1499.  $y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x.$

**解** 图形关于坐标原点对称. 函数的周期  $T = 2\pi$ . 在一周期  $-\pi \leq x \leq \pi$  内讨论图形.

零点处:  $x = 0$  或  $\pm \pi$ .

$$y' = \cos x + \cos 3x, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4};$$

$$y'' = -\sin x - 3\sin 3x,$$

令  $y'' = 0$  得

$$x_1 = 0, y_1 = 0;$$

$$x_{2,3} = \pm \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \approx \pm 0.37\pi,$$

$$y_{2,3} = \pm \frac{4}{27} \sqrt{30} = \pm 0.81;$$

$$x_{4,5} = \pm \left( \pi - \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \right) \approx \pm 0.63\pi,$$

$$y_{4,5} = \pm \frac{4}{27} \sqrt{30} = \pm 0.81;$$

$$x_{6,7} = \pm \pi, y_{6,7} = 0.$$

经判别:点  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  和  $x_7$  均为拐点;

极小值:当  $x = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$  时,  $y = -\frac{2}{3} \sqrt{2}$   
 $\approx -0.94$ ;

当  $x = \frac{\pi}{2}$  时,  $y = \frac{2}{3}$ ;

极大值:当  $x = -\frac{\pi}{2}$  时,  $y = -\frac{2}{3}$ ;

当  $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$  时,  $y = \frac{2}{3} \sqrt{2} \approx 0.94$ .

图形如图 2.88 所示,图中主要点的坐标:

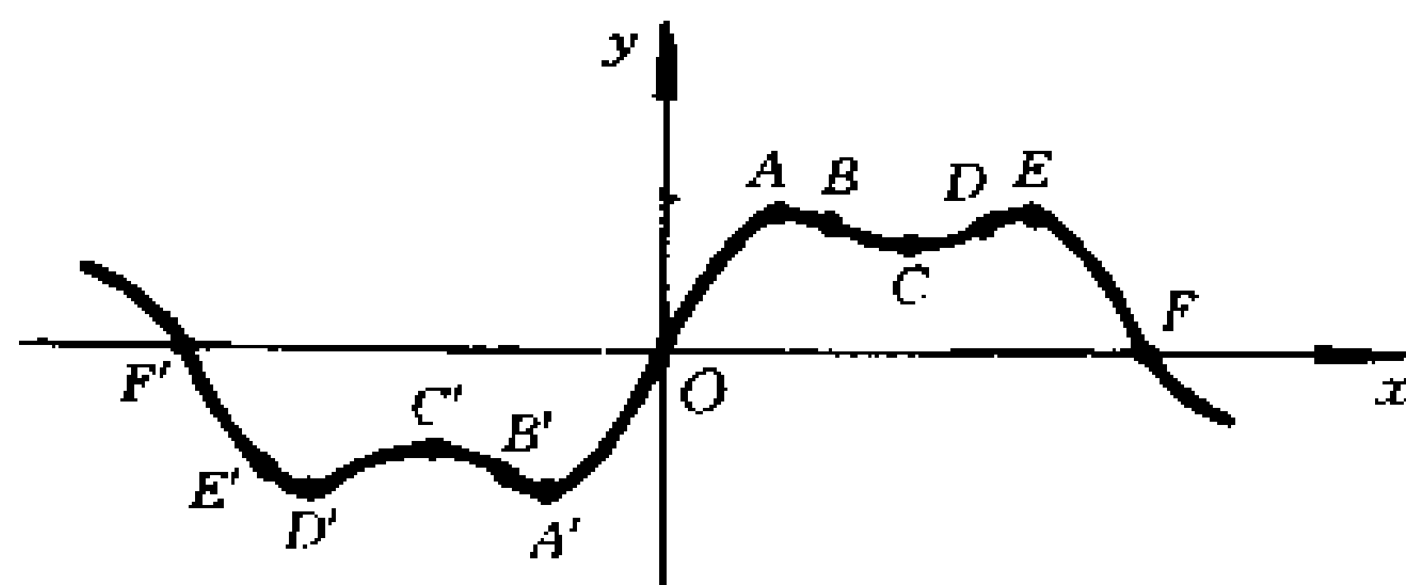


图 2.88

$$A\left(\frac{\pi}{4}, 0.94\right), B(0.37\pi, 0.81), C\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\right),$$

$$D(0.63\pi, 0.81), E\left(\frac{3\pi}{4}, 0.94\right) \text{ 和 } F(\pi, 0);$$

点  $A', B', C', D', E', F'$ , 和点  $A, B, C, D, E, F$  关于原点对称.

1500.  $y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x.$

**解** 图形关于  $Oy$  轴对称. 函数的周期  $T = 2\pi$ . 在一周期  $-\pi \leq x \leq \pi$  内讨论图形.

$$\text{零点处: } x = \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \approx \pm 0.62\pi.$$

$$y' = -\sin x + \sin 2x, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = 0, \pm \frac{\pi}{3}, \pm \pi.$$

$$y'' = -\cos x + 2\cos 2x, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得}$$

$$x_{1,2} = \pm \arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \approx \pm 0.18\pi, y_{1,2} \approx 0.63;$$

$$x_{3,4} = \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{33}}{8} \approx \pm 0.70\pi, y_{3,4} \approx -0.44.$$

经判别: 点  $x_1, x_2, x_3$  和  $x_4$  均为拐点;

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时有极小值 } y = \frac{1}{2};$$

$$\text{当 } x = \pm \pi \text{ 时有极小值 } y = -\frac{3}{2};$$

$$\text{当 } x = \pm \frac{\pi}{3} \text{ 时有极大值 } y = \frac{3}{4}.$$

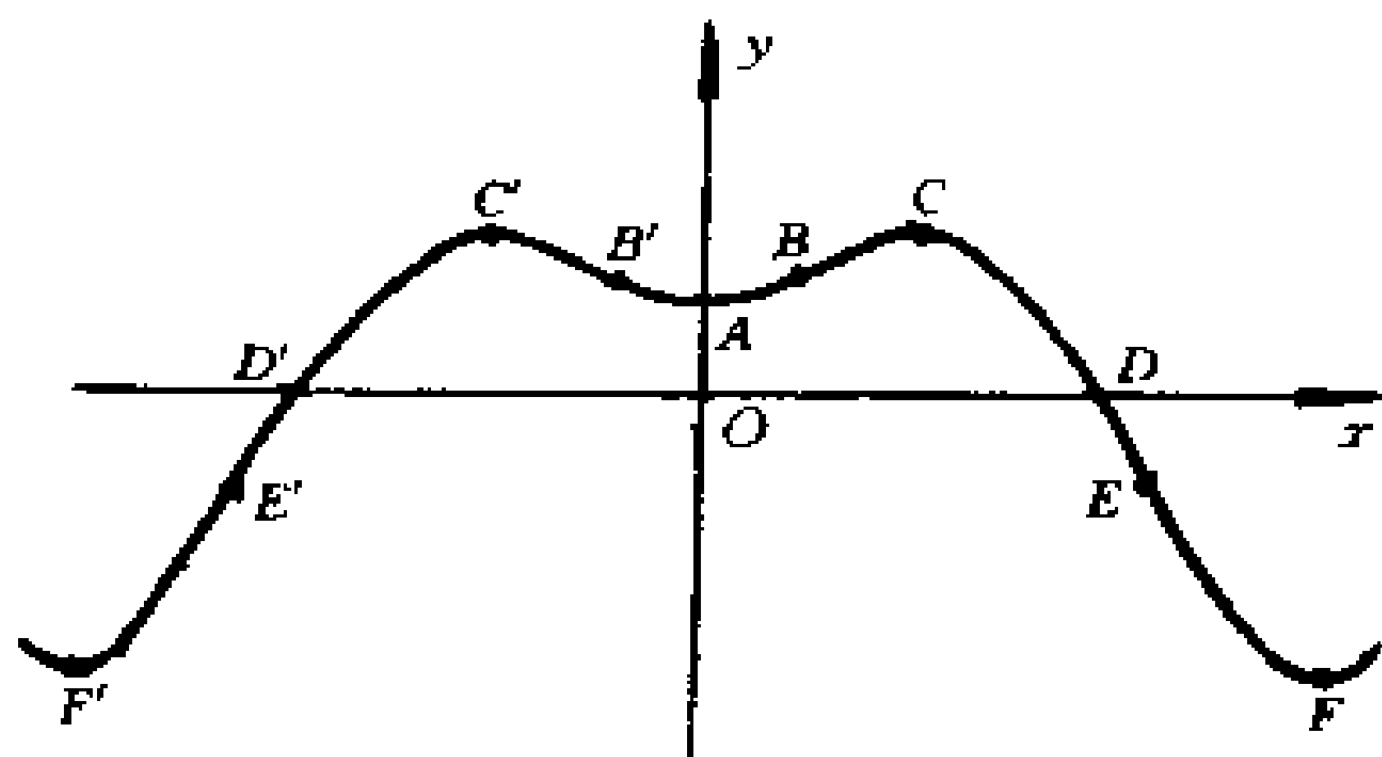


图 2.89

图形如图 2.89 所示, 图中主要点的坐标:

$$A\left(0, \frac{1}{2}\right), B(0.18\pi, 0.63), C\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{4}\right),$$

$$D(0.62\pi, 0), E(0.70\pi, -0.44), F\left(\pi, -\frac{3}{2}\right);$$

点  $B', C', D', E', F'$ , 与点  $B, C, D, E, F$  关于  $Oy$  轴对称.

1501.  $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ .

**解** 图形关于  $Oy$  轴对称.

由于

$$\begin{aligned} y &= \sin^4 x + \cos^4 x \\ &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(3 + \cos 4x), \end{aligned}$$

故函数的周期  $T = \frac{\pi}{2}$ . 在一周期  $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  内讨论图形.

$$y' = -\sin 4x. \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得 } x = 0 \text{ 或 } \pm \frac{\pi}{4}.$$

$$y'' = -4\cos 4x. \text{ 令 } y'' = 0, \text{ 得 } x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{8},$$

$$y_{1,2} = \frac{3}{4}.$$

经判别:点  $x_1$  和

$x_2$  均为拐点;

当  $x = 0$  时有极大值

$$y = 1;$$

当  $x = \pm \frac{\pi}{4}$  时有极小

$$\text{值 } y = \frac{1}{2}.$$

图形如图 2.90 所示,

图中主要点的坐标:

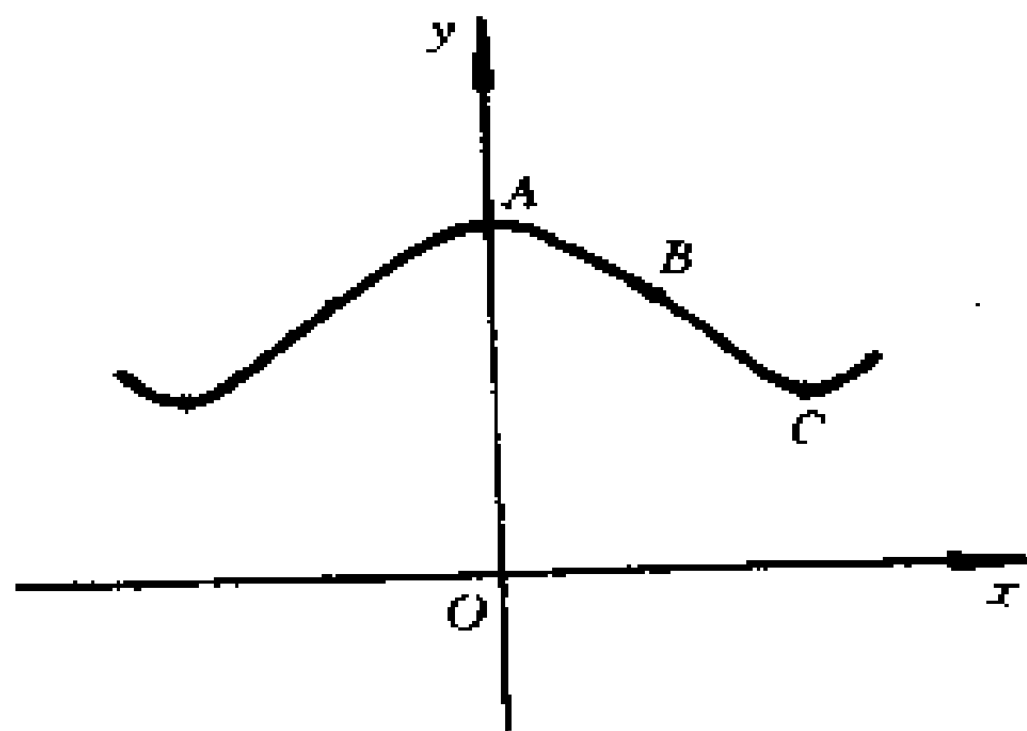


图 2.90

$$A(0, 1), B\left(\frac{\pi}{8}, \frac{3}{4}\right) \text{ 和 } C\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

1502.  $y = \sin x \cdot \sin 3x.$

**解** 图形关于  $Oy$  轴对称.

由于

$$y = \sin x \sin 3x = -\left(\cos 2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{16}, \text{ 故函数的周期}$$

$$T = \pi. \text{ 在一周期 } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ 内讨论图形.}$$

$$\text{零点处: } x = 0 \text{ 或 } \pm \frac{\pi}{3}.$$

$$y' = 2\sin 4x - \sin 2x, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}.$$

$$y'' = 8\cos 4x - 2\cos 2x, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得}$$

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 + \sqrt{129}}{16} \approx \pm 0.11\pi,$$



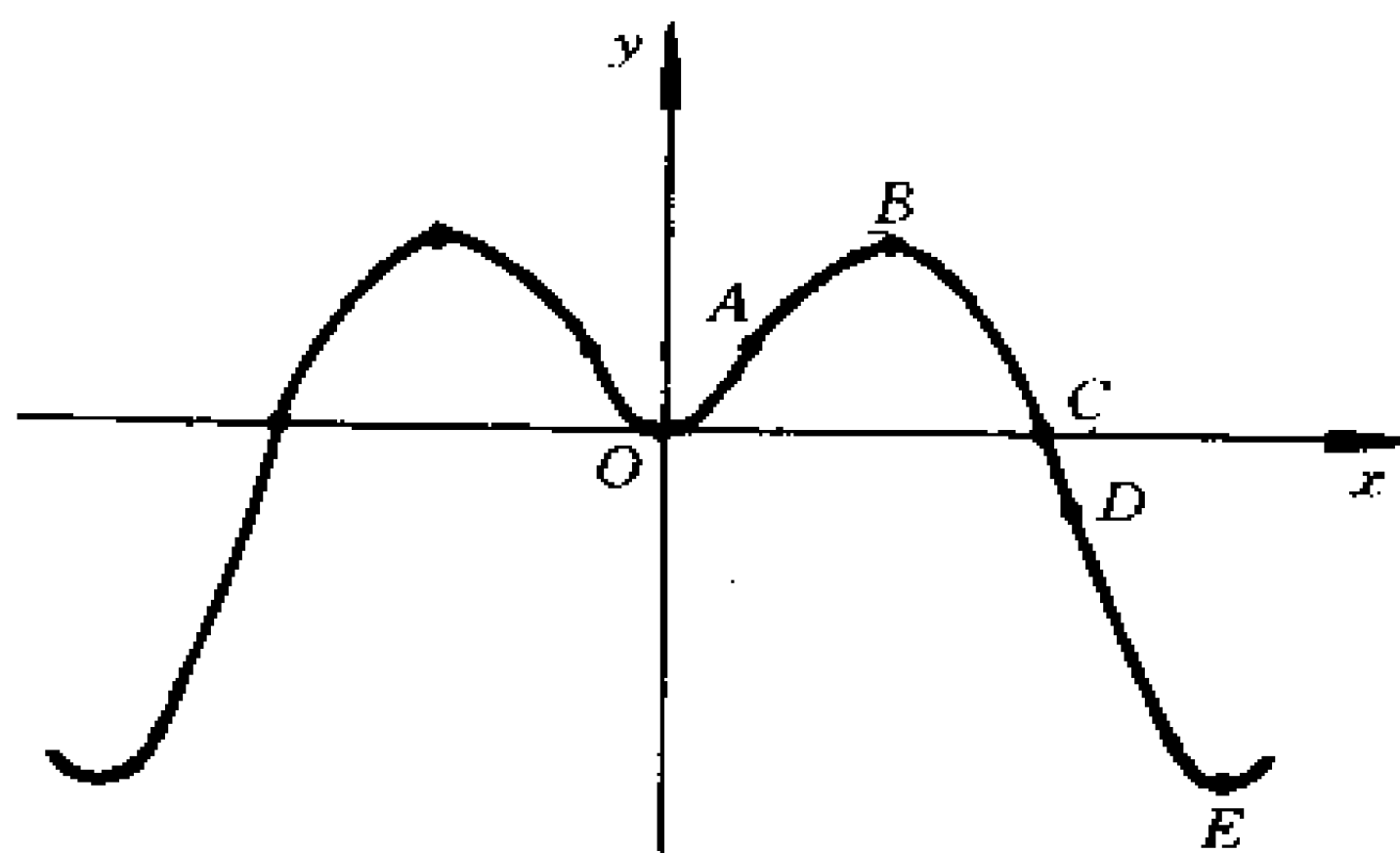


图 2.91

$$y_{1,2} \approx 0.29;$$

$$x_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{129}}{16} \approx \pm 0.36\pi,$$

$$y_{3,4} \approx -0.24.$$

经判别:点  $x_1, x_2, x_3$  和  $x_4$  均为拐点;

极小值:当  $x = 0$  时  $y = 0$ ,

$$\text{当 } x = \pm \frac{\pi}{2} \text{ 时, } y = -1;$$

极大值:当  $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} \approx \pm 0.21\pi$  时,  $y = \frac{9}{16}$

图形如图 2.91 所示,图中主要点的坐标:

$$A(0.11\pi, 0.29), B\left(0.21\pi, \frac{9}{16}\right), C\left(\frac{\pi}{3}, 0\right),$$

$$D(0.36\pi, -0.24), E\left(\frac{\pi}{2}, -1\right).$$

1503.  $y = \frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}.$

**解** 利用  $\sin(\pi + x) = -\sin x$ , 易知函数的周期

$$T = \pi.$$

在一周期  $0 \leq x \leq \pi$  内讨论图形.

不连续点:  $x = \frac{3\pi}{4}$ .

零点处:  $x = 0$  或  $\pi$ .

渐近线:  $x = \frac{3\pi}{4}$ .

$$y' = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} > 0,$$

无极值, 函数图形上升.

$$y'' = -\frac{2\sin \frac{\pi}{4} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin^3\left(x + \frac{\pi}{4}\right)},$$

令  $y'' = 0$  得  $x = \frac{\pi}{4}$ , 对应的  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . 经判别为拐点.

图形如图 2.92 所示, 图中主要点的坐标:

$$A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B(\pi, 0) \text{ 和 } C\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

1504.  $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}.$

**解** 图形关于  $Oy$  轴对称. 函数的周期  $T = 2\pi$ . 在一周期  $-\pi \leq x \leq \pi$  内讨论图形.

零点处:  $x = \pm \frac{\pi}{2}$ .

渐近线:  $x = \pm \frac{\pi}{4}$

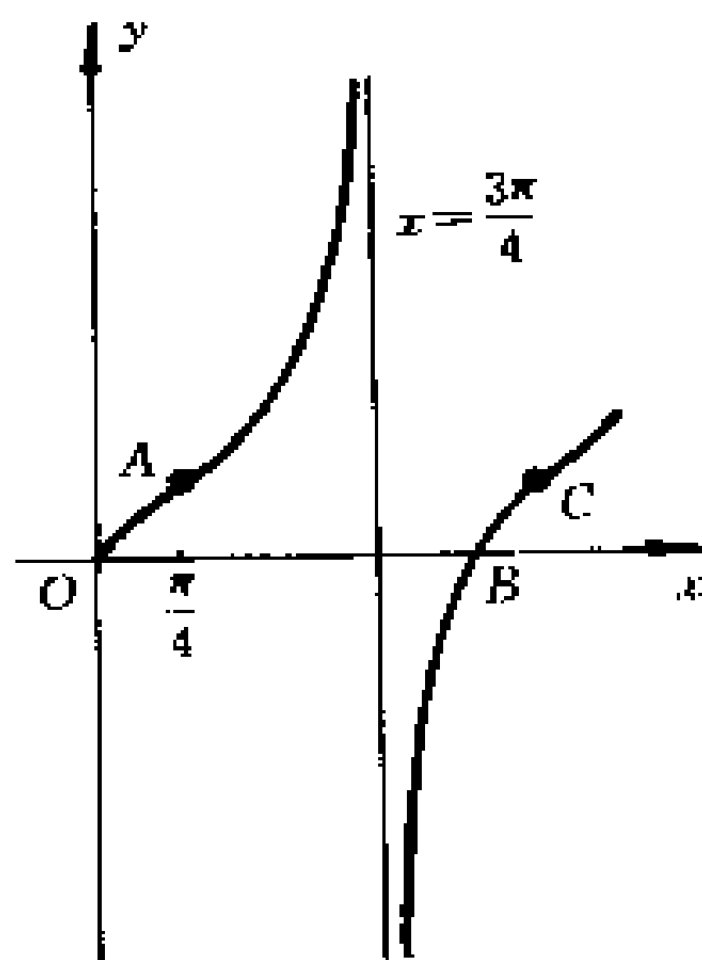


图 2.92

及  $x = \pm \frac{3\pi}{4}$ .

$$y' = \frac{\sin x(1 + 2\cos^2 x)}{\cos^2 2x},$$

令  $y' = 0$  得  $x = 0$  或  $\pm \pi$ ;

$$y'' = \frac{1}{\cos^3 2x} [3\cos x \cos^2 2x + 4\sin 2x \sin x (1 + 2\cos^2 x)],$$

令  $y'' = 0$  得  $x = \pm \frac{\pi}{2}$ .

经判别: 当  $x = 0$  时有极小值  $y = 1$ ;

当  $x = \pm \pi$  时有极大值  $y = -1$ ;

点  $x = \pm \frac{\pi}{2}$  均为拐点, 此时  $y = 0$ .

当  $0 < x < \pi$  时,  $y' > 0$ , 曲线上升;

当  $-\pi < x < 0$  时,  $y' < 0$ , 曲线下降.

图形如图 2.93 所示.

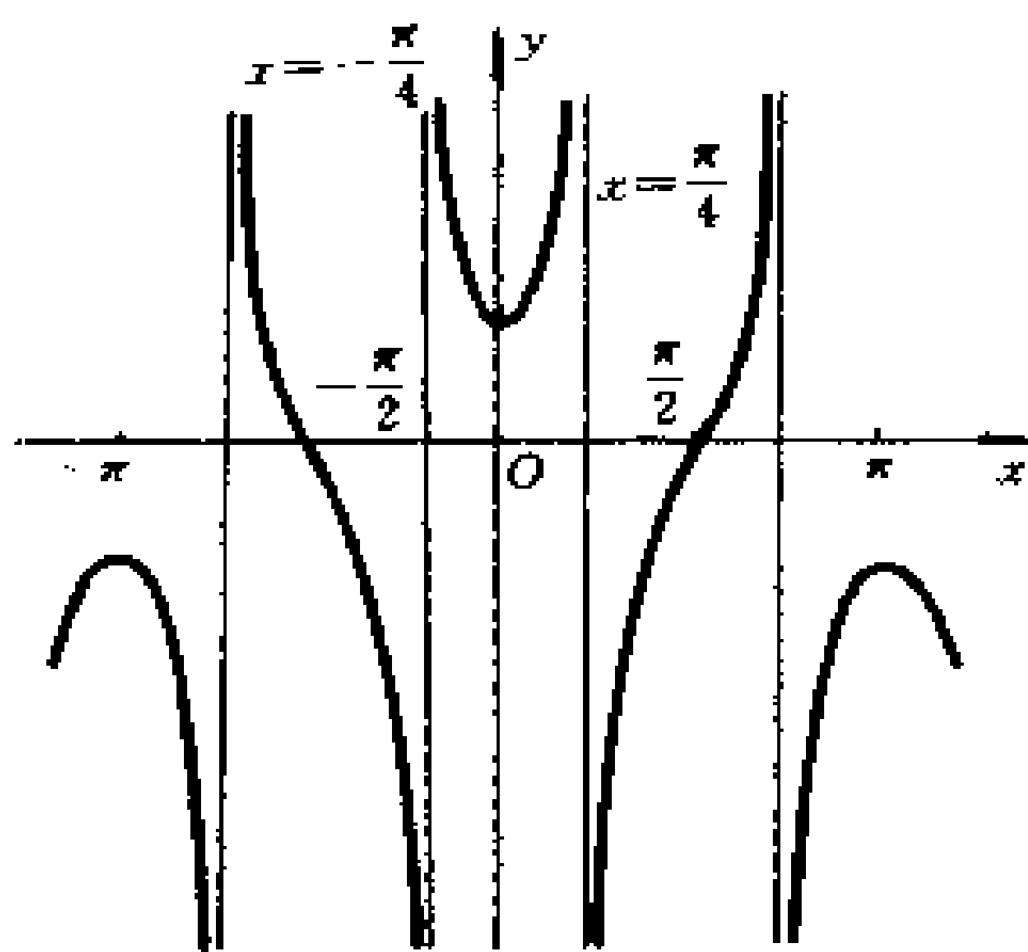


图 2.93

1505.  $y = 2x - \operatorname{tg} x$ .

**解** 零点处:  $x = 0$  及  $x \approx \pm 0.37\pi, \dots$

对称中心:  $(k\pi, 2k\pi) (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ .

渐近线:  $x = \frac{2k+1}{2}\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ .

$y' = 2 - \sec^2 x$ , 令  $y' = 0$  得

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ 或 } x = -\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right).$$

经判别: 当  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$  时, 有极大值  $y = \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi$ ;

当  $x = -\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$  时, 有极小值  $y = -\left(\frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi\right) (k = 0, 1, 2, \dots)$ .

$y'' = -2\sec^2 x \operatorname{tg} x$ , 令  $y'' = 0$  得  $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ .

经判别此为拐点. 图形如图 2.94 所示

(仅描绘从  $-\frac{3\pi}{2}$  到  $\frac{3\pi}{2}$  区间内的图形).

1506.  $y = e^{2x-x^2}$ .

**解** 函数值始终为正的, 故图形在  $Ox$  轴的上方.

$y = e^{-(x-1)^2+1}$ , 于是图形关于直线  $x = 1$  对称.

渐近线:  $y = 0$ .

$y' = (2 - 2x) \cdot e^{2x-x^2}$ , 令  $y' = 0$  得  $x = 1$ , 经判别知此时有极大值  $y = e$ ;

$y'' = 2(2x^2 - 4x + 1)e^{2x-x^2}$ , 令  $y'' = 0$  得  $x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

经判别为拐点,  $y = \sqrt{e} \approx 1.65$ .

图形如图 2.95 所示, 图中各点的位置:

$$D\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right).$$

1507.  $y = (1 + x^2)e^{-x^2}.$

解 图形关于  $Oy$  轴对称, 在  $Ox$  轴的上方.

渐近线:  $y = 0.$

$y' = -2x^3e^{-x^2}$ , 令  $y' = 0$  得  $x = 0$ , 经过  $x = 0$  点, 导数  $y'$  从正变负, 所以当  $x = 0$  时取极大值  $y = 1.$

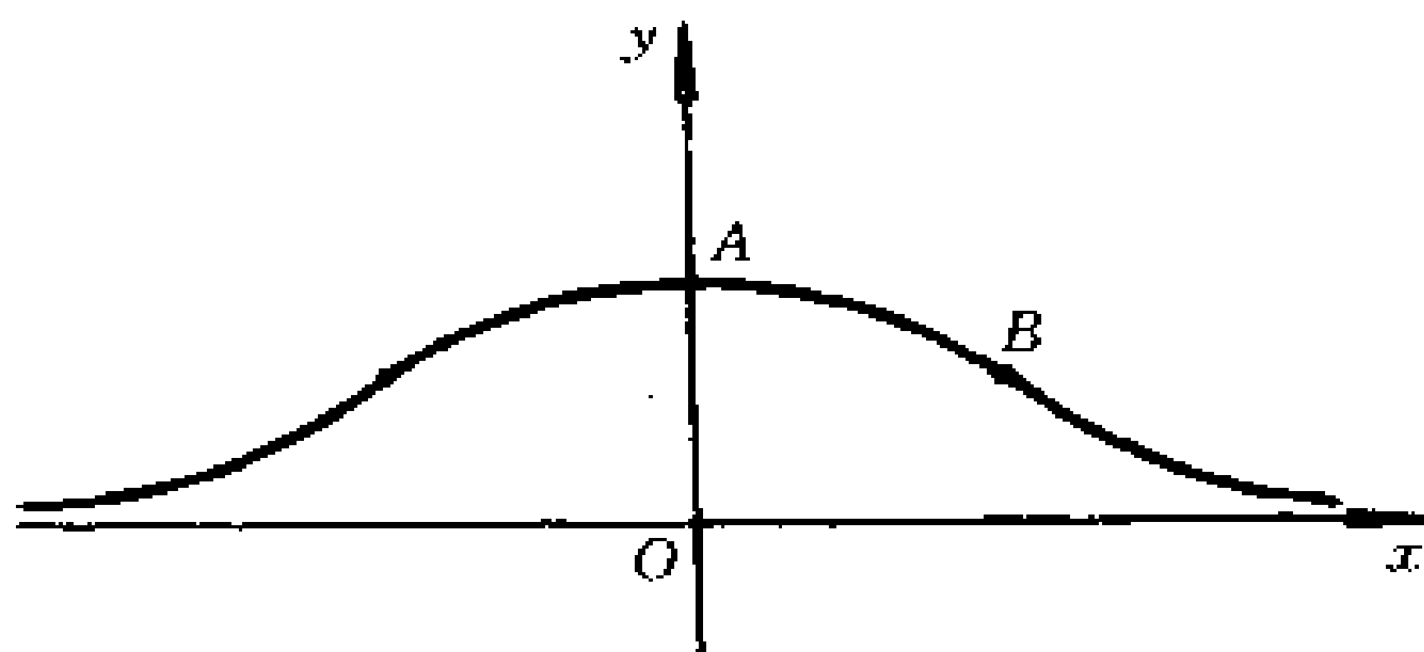


图 2.96

$$y'' = 2x^2e^{-x^2}(2x^2 - 3), \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1.22,$$

经判别为拐点, 而  $y = \frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.56.$

图形如图 2.96 所示, 图中主要点的坐标:

$$A(0, 1), B(1.22, 0.56).$$

1508.  $y = x + e^{-x}.$

解  $y' = 1 - e^{-x}$ , 令  $y' = 0$  得  $x = 0, y = 1.$

$y'' = e^{-x} > 0$ , 图形向上凹, 故当  $x = 0$  时有极小值  $y = 1.$

斜渐近线:  $y = x.$  事实上,

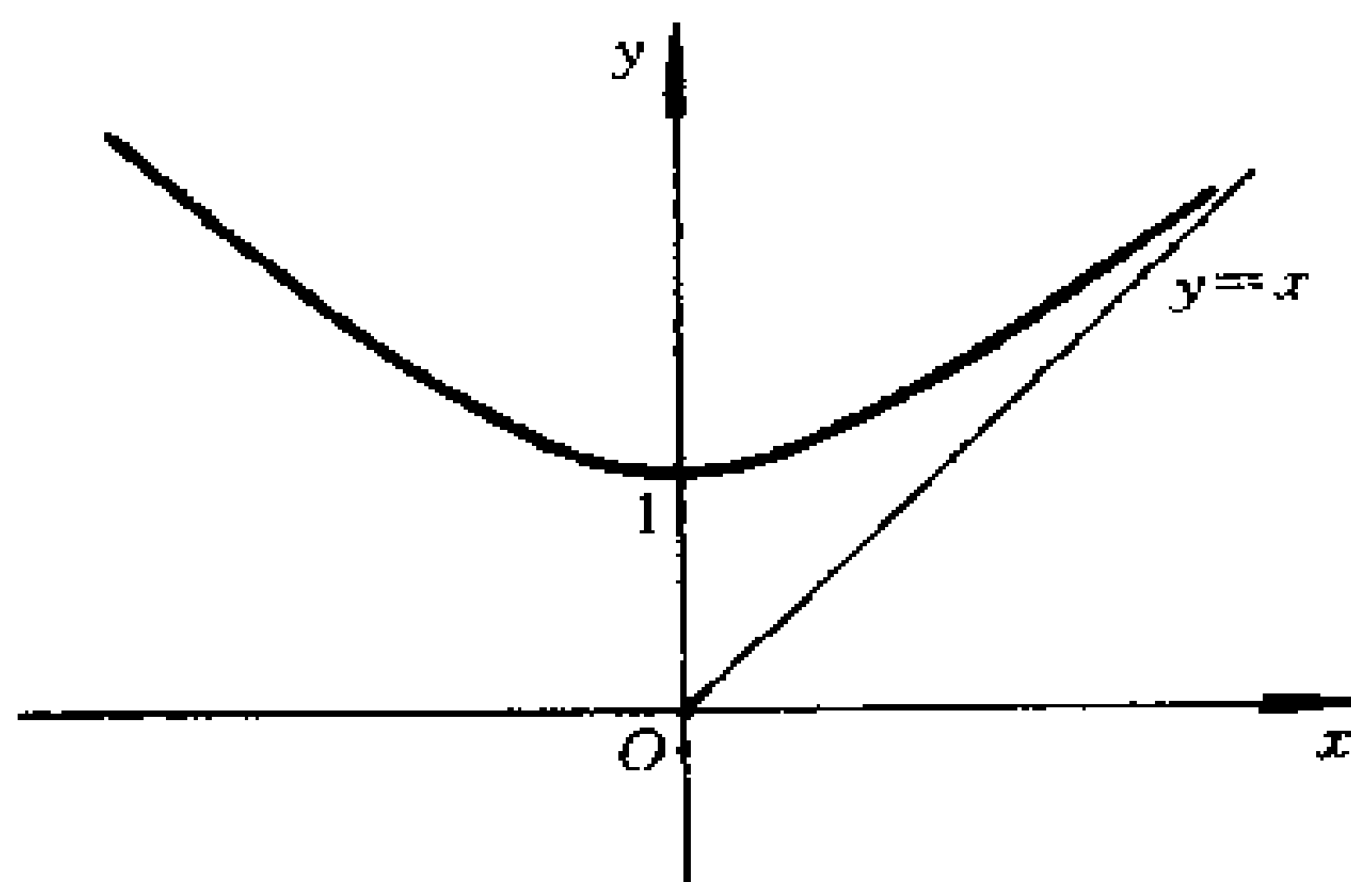


图 2.97

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = 0.$$

图形如图 2.97 所示.

1509.  $y = x^{\frac{2}{3}}e^{-x}.$

解 零点处:  $x = 0.$

渐近线:

$y = 0$  (当  $x \rightarrow +\infty$  时).

$$y' = -x^{-\frac{1}{3}}e^{-x}\left(x - \frac{2}{3}\right),$$

令  $y' = 0$  得  $x = \frac{2}{3}$ , 当  $x = 0$  时,  $y' = \infty.$

经判别: 当  $x = 0$  有极小值  $y = 0$ , 且  $(0, 0)$  点为尖点.

$$\text{当 } x = \frac{2}{3} \text{ 时有极大值 } y = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-\frac{2}{3}} \approx 0.39.$$

由此可知函数值始终为正的, 故图形在  $Ox$  轴上方.

$$y'' = \frac{1}{9}e^{-x}x^{-\frac{4}{3}}(9x^2 - 12x - 2), \text{ 令 } y'' = 0, \text{ 得}$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{6}}{3} \approx -0.15, y_1 \approx 0.33,$$

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{6}}{3} \approx 1.48, y_2 \approx 0.30,$$

经判别均为拐点.

图形如图 2.98 所示, 图中主要点的坐标:

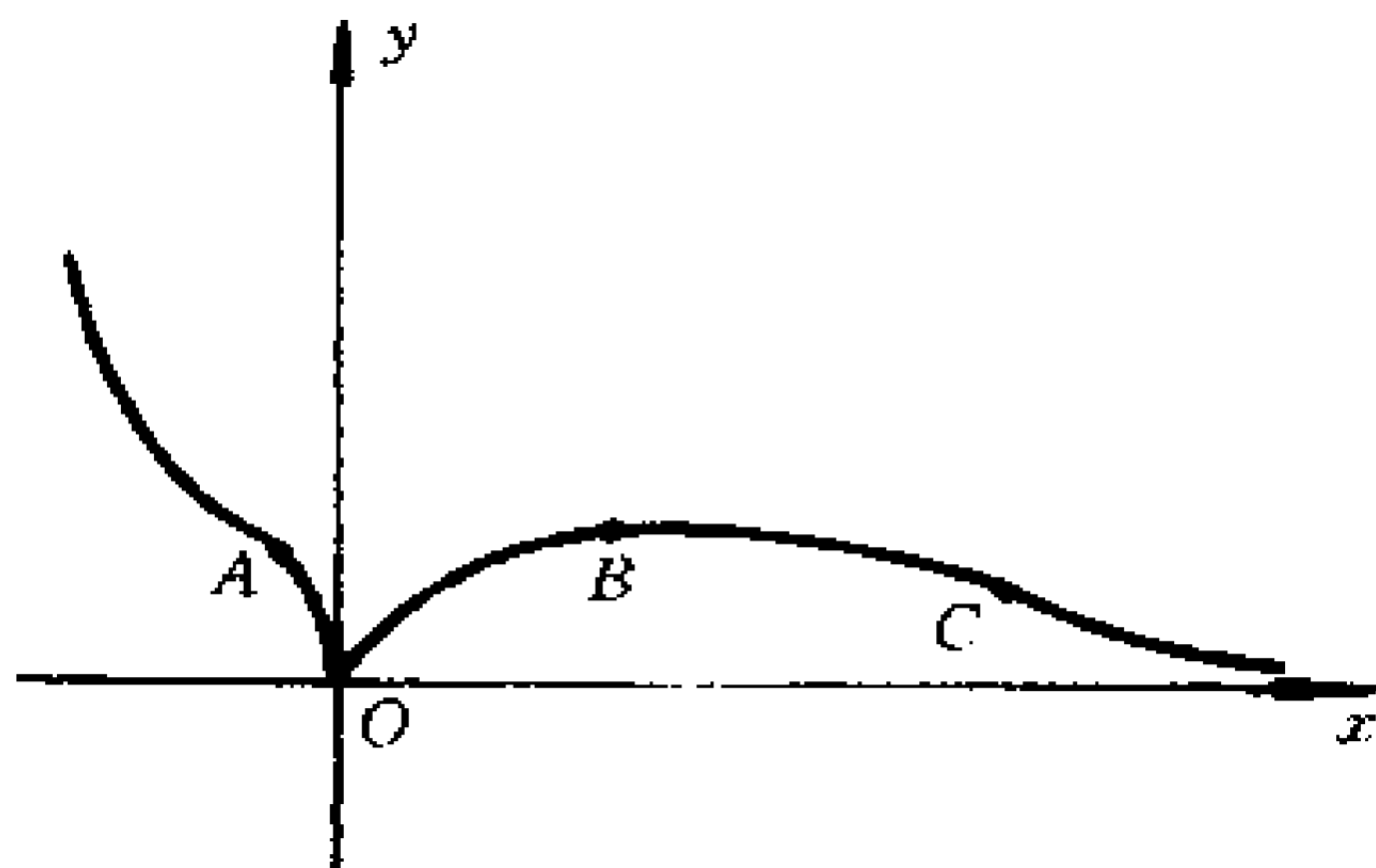


图 2.98

$$A(-0.15, 0.34), B\left(\frac{2}{3}, 0.39\right), C(1.48, 0.30).$$

1510.  $y = \frac{e^x}{1+x}.$

解 当  $x < -1$  时, 函数值为负的,

当  $x > -1$  时, 函数值为正的.

不连续点:  $x = -1$ . 垂直渐近线:  $x = -1$ .

又水平渐近线:  $y = 0$  (当  $x \rightarrow -\infty$  时). 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = 0, b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = 0.$$

$$y' = \frac{xe^x}{(1+x)^2},$$

令  $y' = 0$  得  $x = 0$ .

经判别知此时有极小值

$$y = 1.$$

$$y'' = \frac{e^x(x^2 + 1)}{(1 + x)^3},$$

当  $x < -1$  时,  $y'' < 0$ , 故

图形是凸的;

当  $x > -1$  时,  $y'' > 0$ , 故

图形是凹的.

图形如图 2.99 所示.

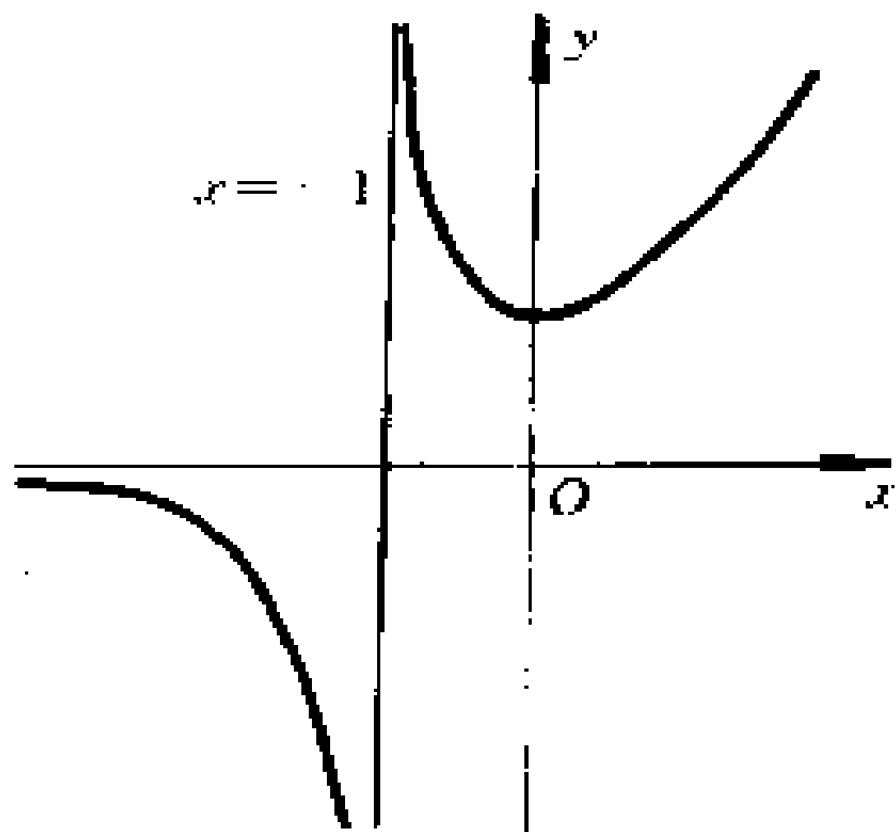


图 2.99

1511.  $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}.$

**解** 图形关于  $Oy$  轴对称.

零点处:  $x = 0$ .

函数值不为负.

当  $x = 0$  时有最小值  $y = 0$ .

渐近线:  $y = 1$ .

$$y' = \frac{-xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

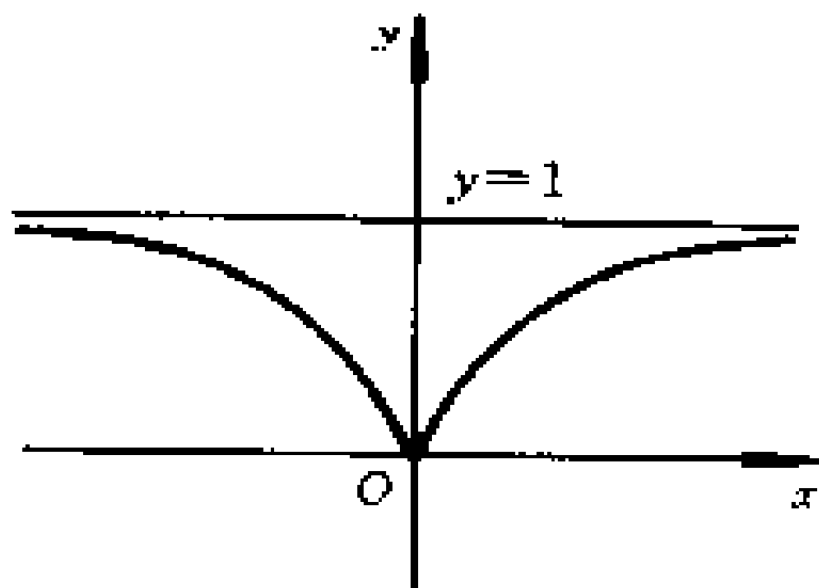


图 2.100

当  $x < 0$ ,  $y' < 0$ ; 当  $x > 0$ ,  $y' > 0$ .

$$y'' = e^{-x^2} \frac{1 - 3x^2 - e^{-x^2} + 2x^2e^{-x^2}}{(1 - e^{-x^2}) \sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

令  $g(t) = 1 - 3t - e^{-t} + 2te^{-t}$  ( $0 \leq t < +\infty$ ), 易证  $g(t) \leq 0$ . 于是, 对于  $x \neq 0$ , 恒有  $y'' < 0$ , 即图形呈凸状. 而  $(0,0)$  点为尖点(图 2.100).

1512.  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$



解 存在域:  $x > 0$ .

零点处:  $x = 1$ .

渐近线:  $x = 0$  ( $x \rightarrow +0$ ),  $y = 0$  ( $x \rightarrow +\infty$ ).

$$y' = \frac{2 - \ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = e^2 \approx 7.39.$$

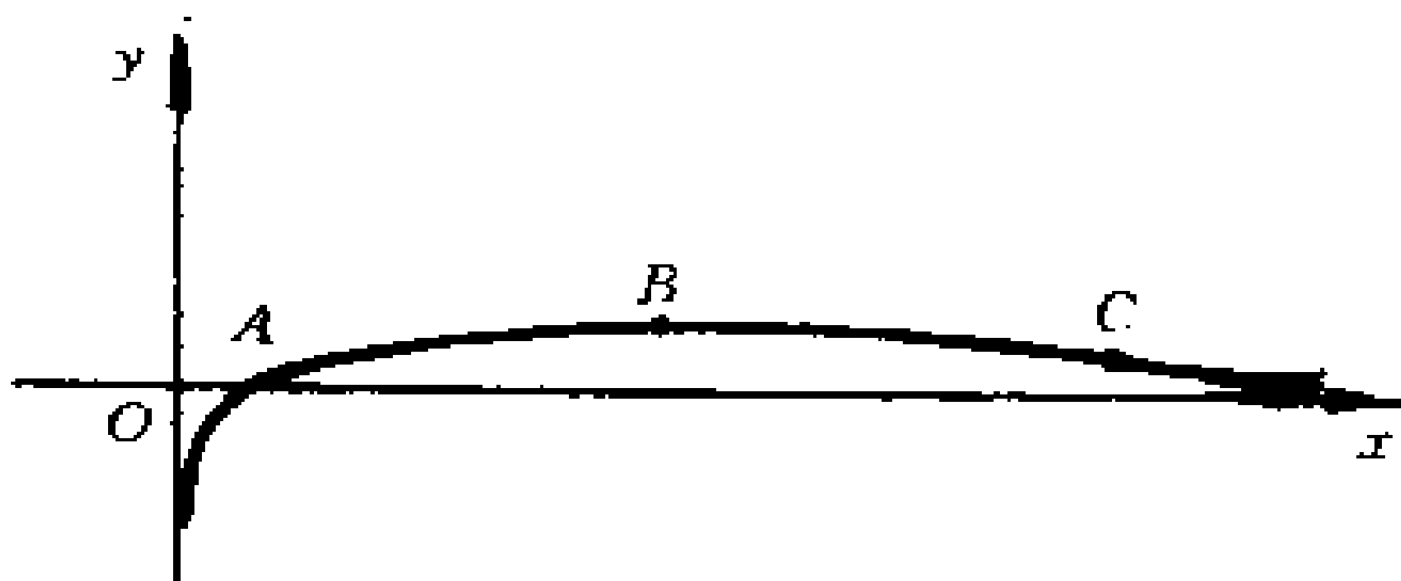


图 2.101

经判别知此时有极大值  $y = \frac{2}{e} \approx 0.74$ .

$$y'' = \frac{3\ln x - 8}{4x^{\frac{5}{2}}}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得}$$

$$x = e^{\frac{8}{3}} \approx 14.39,$$

经判别此为拐点, 此时  $y = \frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}} \approx 0.70$ .

图形如图 2.101 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(1, 0), B(7.39, 0.74), C(14.39, 0.70).$$

1513.  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

解 由于  $\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,  
故图形关于坐标原点对称.

零点处:  $x = 0$ .

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \text{ 故图形始终上升, 无极值点.}$$

$$y'' = \frac{-x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}},$$

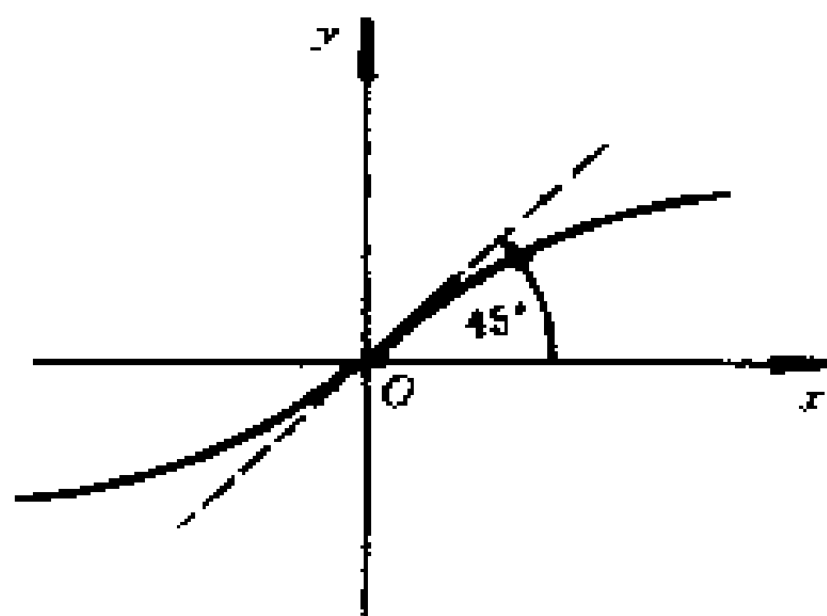
令  $y'' = 0$ , 得  $x = 0$ ,

在此点切线斜率为  $k = 1$ .

经判别此为拐点, 此

时  $y = 0$ .

图形如图 2.102 所示.



1514.  $y = \sqrt{x^2 + 1} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

图 2.102

**解** 图形关于坐标原点对称.

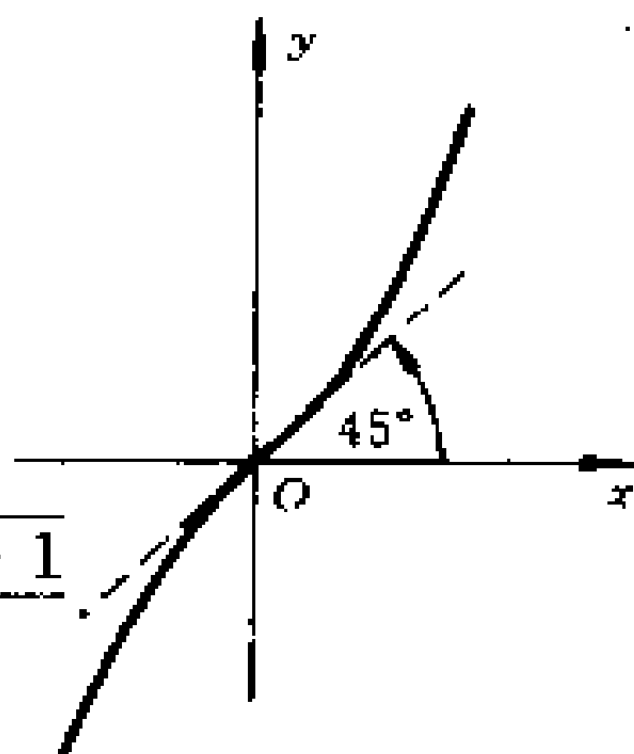
零点处:  $x = 0$ .

$$y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

$$\sqrt{x^2 + 1}),$$

$$y'' =$$

$$\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + x \sqrt{x^2 + 1}}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$



当  $x > 0$  时,  $y'' > 0$ , 故图

形是凹的.

图 2.103

当  $x < 0$  时, 由对称性知图形是凸的.

于是得知  $O(0,0)$  为拐点, 在此点切线斜率为  $k = 1$ .

从而, 函数图形始终上升, 如图 2.103 所示.

1515.  $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}.$

**解** 图形关于坐标原点对称.

零点处:  $x = 0$ .

存在域:  $|x| < 1$ .

渐近线:  $x = \pm 1$ .

$$y' =$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$> 0 \quad (|x| < 1),$$

故图形始终上升.

$$y'' = \frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

令  $y'' = 0$  得  $x = 0$ .

当  $-1 < x < 0$  时,  $y'' < 0$ , 故图形是凸的,

当  $0 < x < 1$  时,  $y'' > 0$ , 故图形是凹的,  $O(0,0)$  为拐点处, 在此点切线斜率为  $k = 1$ .

图形如图 2.104 所示.

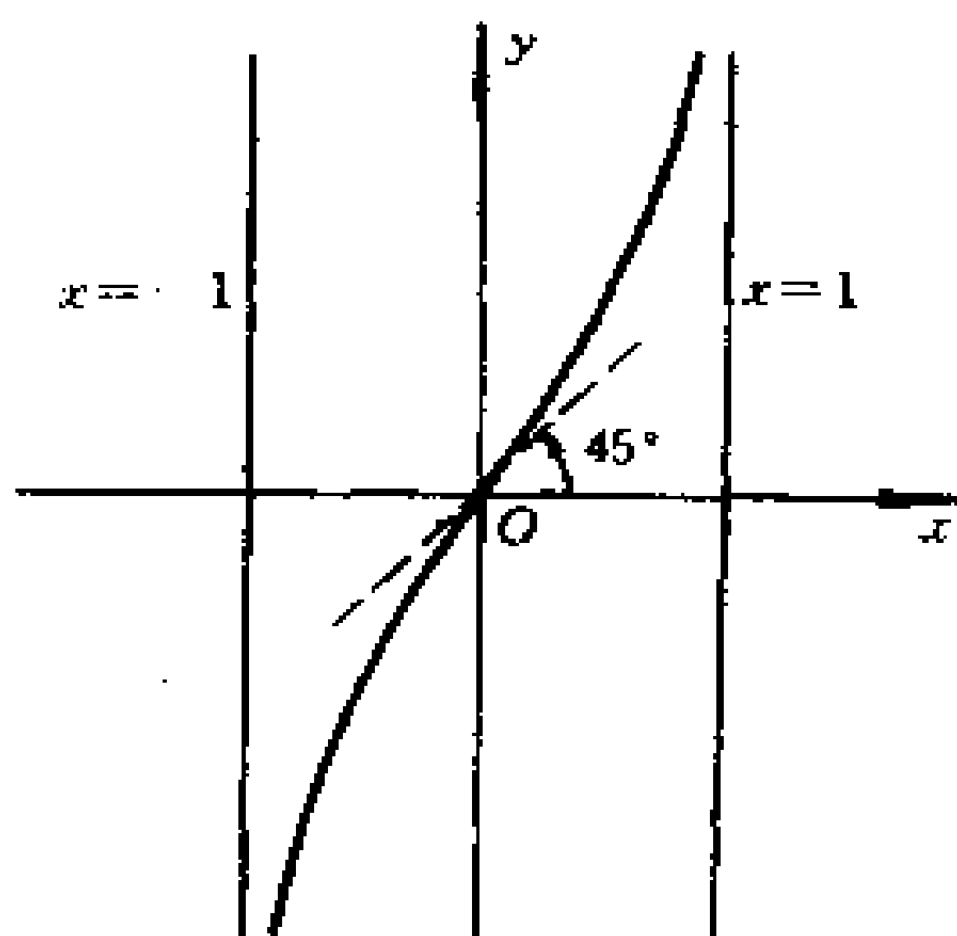


图 2.104

1516.  $y = x + \arctan x$ .

**解** 图形关于坐标原点对称.

零点处:  $x = 0$ .

渐近线:  $y = x - \frac{\pi}{2}, y = x + \frac{\pi}{2}$ . 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, b_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - kx) = -\frac{\pi}{2}, b_2 =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \frac{\pi}{2}.$$

$$y' = 1 + \frac{1}{1+x^2} > 0,$$

故图形始终上升,无  
极值点.

$$y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

令  $y'' = 0$  得  $x = 0$ , 判  
别知为拐点, 在此点切线  
斜率为  $k = 2$ .

图形如图 2.105 所示.

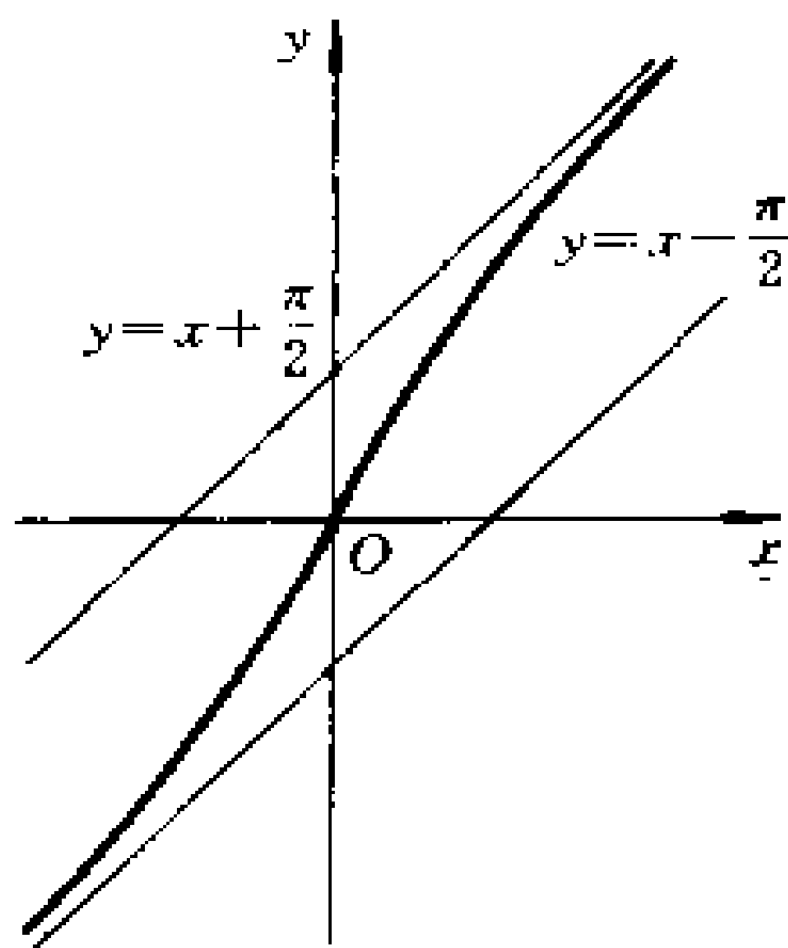


图 2.105

1517.  $y = \frac{x}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x.$

**解** 零点处:  $x \approx -5.95$ .

渐近线:  $y = \frac{x}{2} + \pi$ . 事  
实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x}{x} = \frac{1}{2}.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \left( \frac{x}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x \right) - \frac{1}{2}x \right] = \pi;$$

同法还可得渐近线  $y = \frac{x}{2}$  (当  $x \rightarrow +\infty$  时).

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x^2}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = \pm 1.$$

当  $x < -1$  及当  $x > 1$  时,  $y' > 0$ , 曲线上升;

当  $-1 < x < 1$  时,  $y' < 0$ , 曲线下降;

故当  $x = 1$  时有极小值  $y = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \approx 1.285$ , 当  $x = -1$

时有极大值  $y = -\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} \approx 1.856$ .

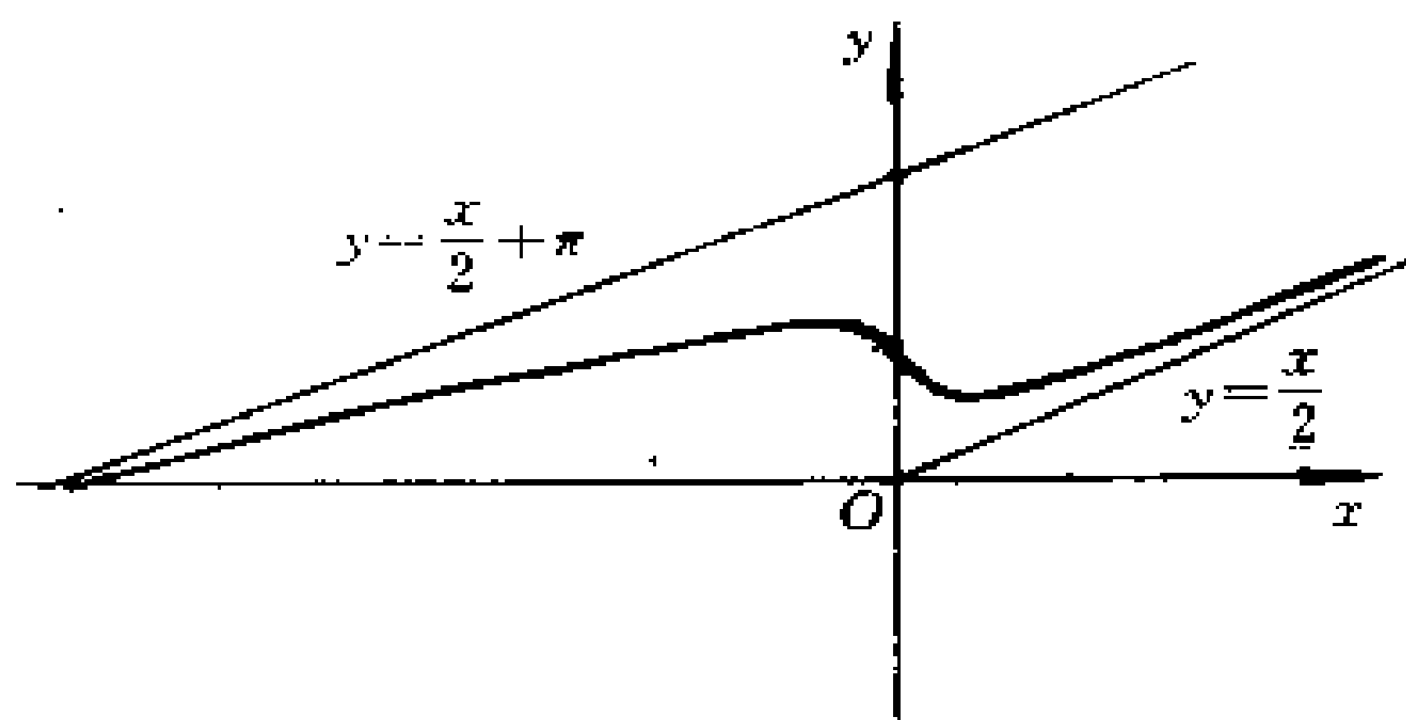


图 2.106

$$y'' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = 0.$$

当  $x < 0$  时,  $y'' < 0$ , 故图形是凸的.

当  $x > 0$  时,  $y'' > 0$ , 故图形是凹的.

从而有拐点  $x = 0$ , 此时  $y = \frac{\pi}{2}, y' = -\frac{1}{2}$ .

图形如图 2.106 所示.

1518.  $y = x \operatorname{arctg} x$ .

**解** 零点处:  $x = 0$ .

图形关于  $Oy$  轴对称.

函数值不为负, 故图形始终在  $Ox$  轴上方.

渐近线:

$$y = -\frac{\pi}{2}x - 1 \text{ (当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时);}$$

$$y = \frac{\pi}{2}x - 1 \text{ (当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时).}$$

$$y' = \frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x,$$

令  $y' = 0$  得  $x = 0$ .

当  $x < 0$  时,  $y' < 0$ , 图形下降; 当  $x > 0$  时,  $y' > 0$ , 图

当  $x = 0$  时,  $y' = 1$ .

又点  $x = 0$  为拐点.

图形如图 2.108 所示.

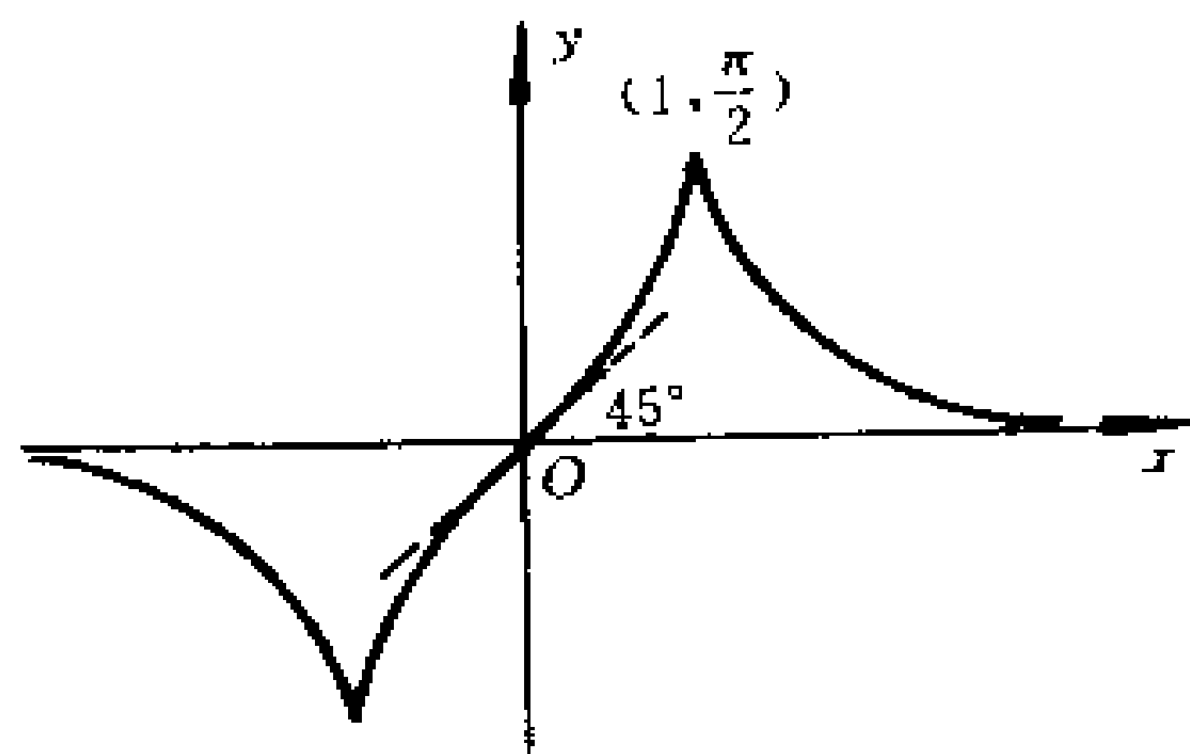


图 2.108

1520.  $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}.$

**解** 零点处:  $x = 0$ .

图形关于  $Oy$  轴对称.

函数值不为负, 故图形始终在  $Ox$  轴上方.

渐近线:  $y = \pi$ . 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \pi.$$

$$y' = \frac{2}{1+x^2} > 0 \quad (x > 0), \text{ 图形上升.}$$

当  $x = 0$  时, 直接从定义出发, 得

$$y'_+(0) = 2.$$

由对称性知,  $y'(0) = -2$ , 且当  $x < 0$  时, 图形下降, 故当  $x = 0$  时有极小值  $y = 0$ . 此点为角点.

$$y'' = -\frac{4x}{(1+x^2)^2} < 0 \quad (x > 0), \text{ 图形是凸的.}$$

由对称性知, 当  $x < 0$  时, 图形也是凸的.

图形如图 2.109 所示.

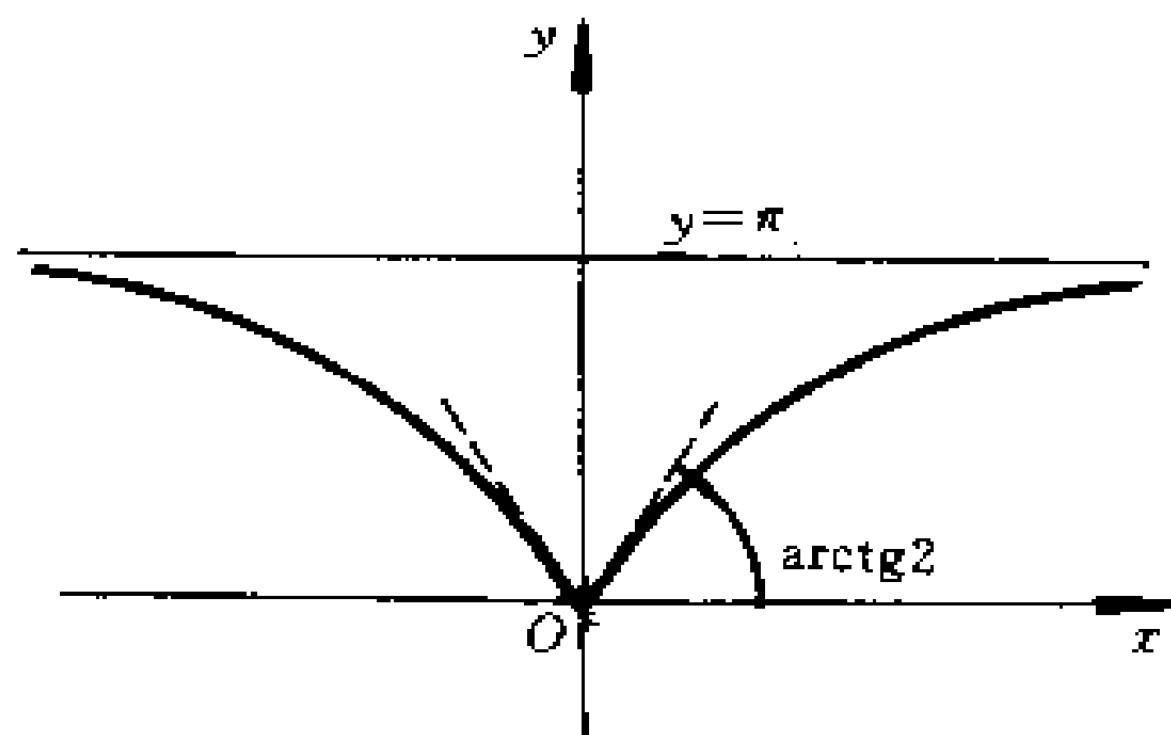


图 2.109

1521.  $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$ .

**解** 零点处:  $x = -2$ .

不连续点:  $x = 0$ .

渐近线:  $y = x + 3$ . 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x} = 1,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2)e^{\frac{1}{x}} - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ 3 + x + o\left(\frac{1}{x}\right) - x \right] = 3. \end{aligned}$$

$$y' = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right).$$

令  $y' = 0$  得  $x = 2$  或  $-1$ .

当  $0 < x < 2$  时,  $y' < 0$ , 图形下降,

当  $-1 < x < 0$  时,

$y' < 0$ , 图形下降,

当  $x < -1$  及  $x > 2$

时,

$y' > 0$ , 图形上升;

故当  $x = -1$  时有极

大值  $y = \frac{1}{e} \approx 0.37$ .

当  $x = 2$  时有极小值

$y = 4\sqrt{e} \approx 6.59$ .

$$y'' = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{5x+2}{x^4} \right).$$

令  $y'' = 0$  得  $x = -$

$$\frac{2}{5},$$

当  $x < -\frac{2}{5}$  时,  $y'' < 0$ , 图形是凸的,

当  $x > -\frac{2}{5}$  ( $x \neq 0$ ) 时,  $y'' > 0$ , 图形是凹的,

故该点是拐点, 此时  $y = \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}} \approx 0.13$ .

又  $\lim_{x \rightarrow 0-} y = 0, \lim_{x \rightarrow 0+} y = +\infty$ .

图形如图 2.110 所示. 图中各点的位置:

$A(-2, 0), B(-1, 0.37),$

$C(-0.40, 0.13), D(2, 6.59).$

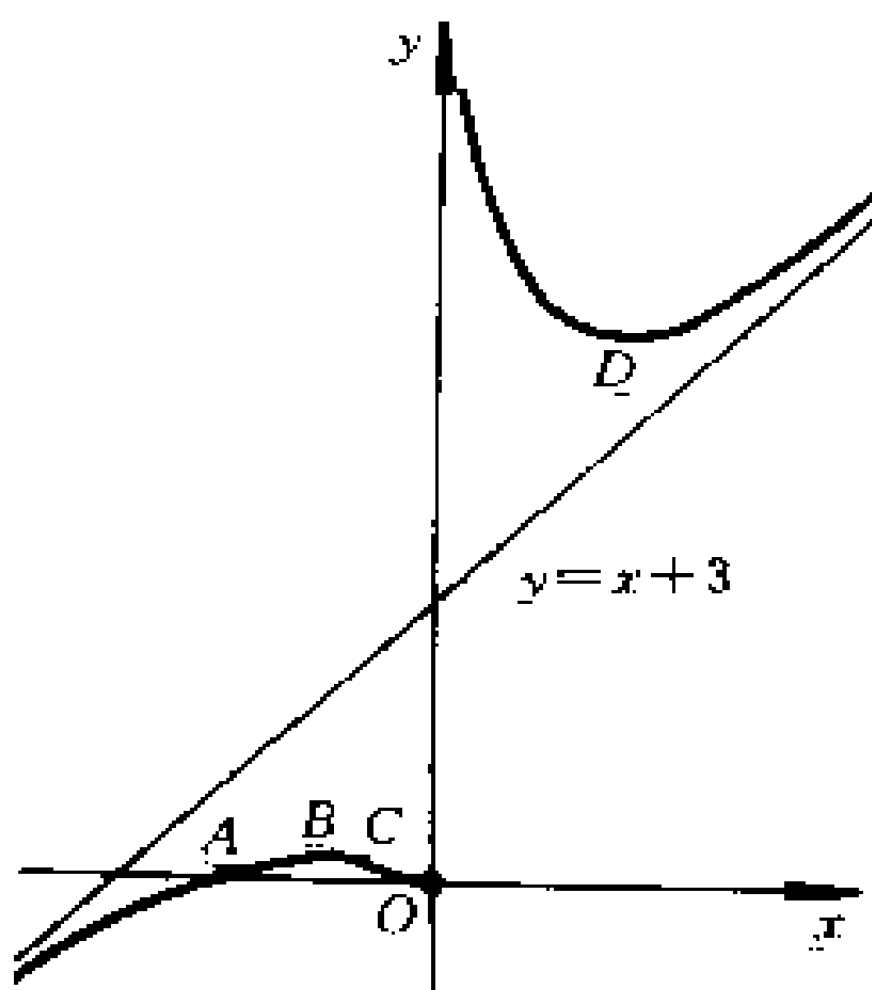


图 2.110

1522.  $y = 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}.$



**解** 存在域:  $|x| \geq 1$ . 图形关于  $Oy$  轴对称.

渐近线:  $y = 1$ . 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}] = 1.$$

当  $x = \pm 1$  时有边界的极大值  $y = 2^{\sqrt{2}} \approx 2.67$ .

$$y'_+(1) = -\infty,$$

$$y'_-(-1) = +\infty.$$

$$y'(x) = 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$$

$$\cdot \ln 2 \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right),$$

故当  $x < -1$  时,  $y' > 0$ , 曲线上升;

$x > 1$  时,  $y' < 0$ , 曲线下降.

$$y''(x) = (\ln 2)^2 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right)^2$$

$$+ \ln 2 \cdot 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$$

$$\cdot \left( \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} \right) > 0, \text{ 故图形呈凹状.}$$

图形如图 2.111 所示.

1523.  $y = \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}.$

**解** 存在域:  $x < 1$  及  $x > 2$ .

与坐标轴的交点:  $(0, \ln 2)$  及  $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ .

渐近线:  $y = 0$ ; 事实上,

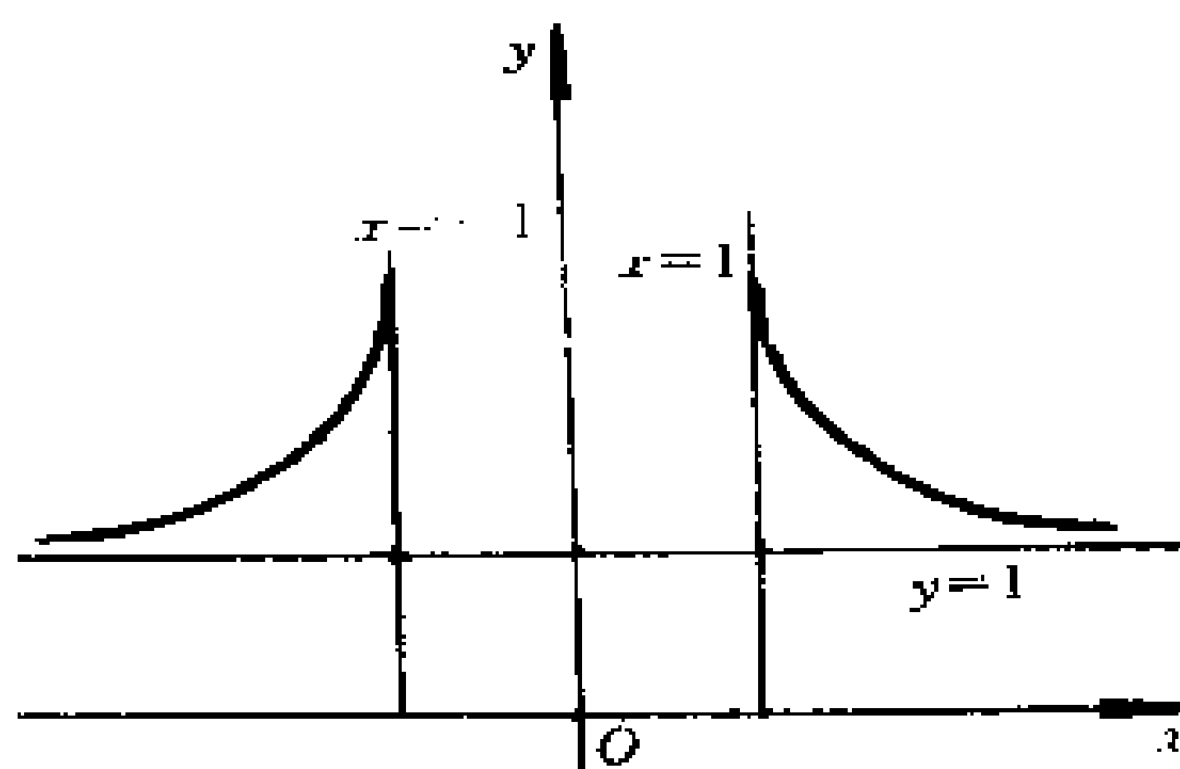


图 2.111

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} = 0.$$

$$y' = \frac{3x^2 - 2x - 3}{(x - 1)(x - 2)(x^2 + 1)}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x =$$

$$\frac{1 - \sqrt{10}}{3} \approx -0.72 \text{ (另一根不在存在域内), 经判别知}$$

当  $x \approx -0.72$  时有极大值  $y \approx 1.12$ .

$$y'' = \frac{-6x^5 + 15x^4 - 30x^2 + 30x - 13}{(x - 1)^2(x - 2)^2(x^2 + 1)^2}, \text{ 令 } y'' =$$

0 得  $x \approx -1.52$ . 判别知为拐点, 此时  $y \approx 0.99$ .

当  $x < -1.49$  时,  $y'' > 0$ , 图形是凹的.

当  $x > 2$  时,  $y'' < 0$ , 图形是凸的.

当  $x \rightarrow 1 - 0$  及  $x \rightarrow 2 + 0$  时,  $y \rightarrow -\infty$ .

图形如图 2.112 所示.

图中主要点的坐标:  $A(-1.52, 0.99)$ ,  $B(-0.72, 1.12)$ ,  $C(0, \ln 2)$ ,  $D\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ .

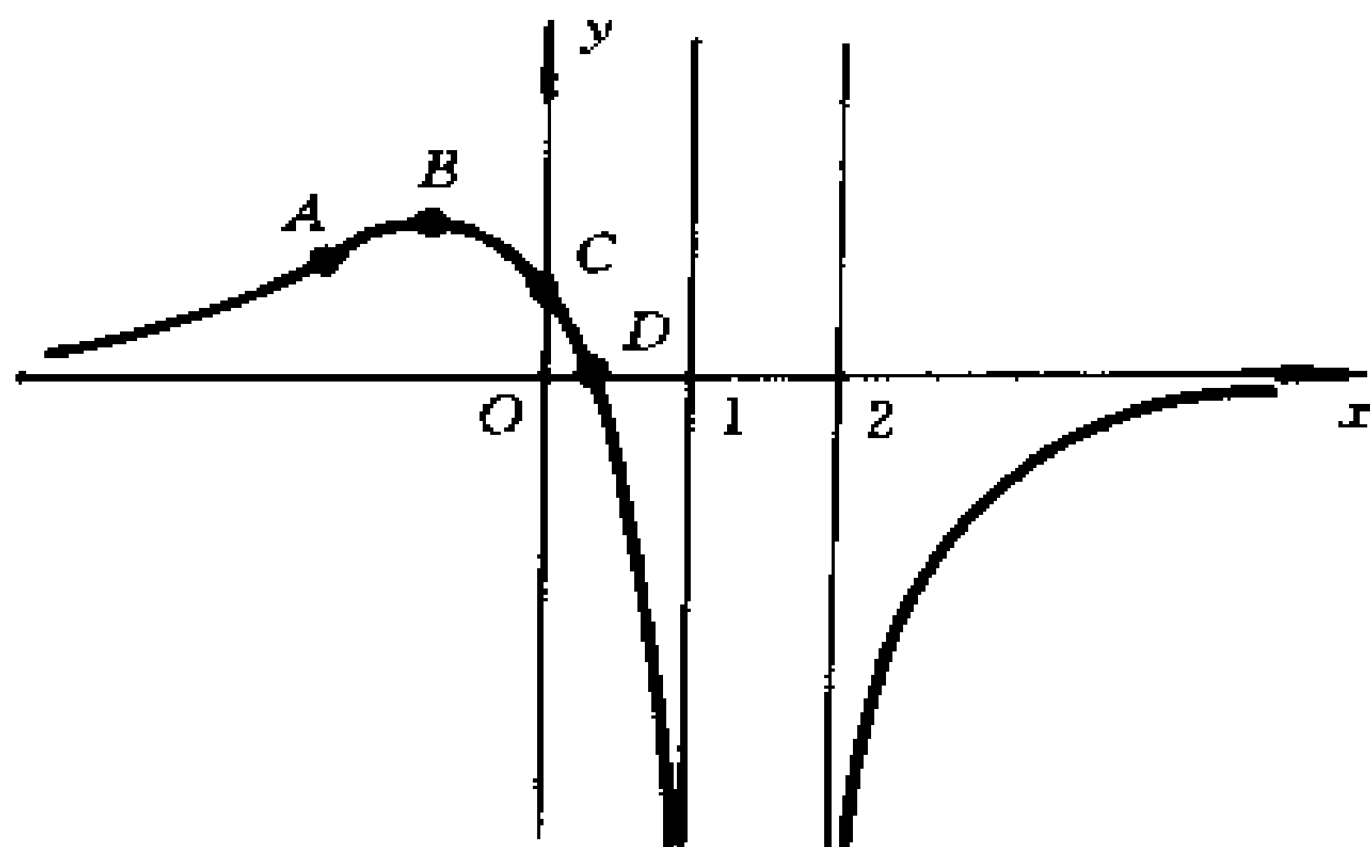


图 2.112

1524.  $y = a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0)$

**解** 存在域:  $|x| \leq a$ .

与坐标轴交点:  $(0, -a)$  及  $(0.67a, 0)$ .

当  $x = -a$  时有边界的极小值  $y = -\frac{\pi}{2}a$ .

当  $x = a$  时有边界的极大值  $y = \frac{\pi}{2}a$ .

$$y' = \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}} > 0 \text{ (当 } |x| < a \text{ 时)}, \text{ 故图形单调}$$

上升. 又

$$y'_-(a) = +\infty, y'_+(-a) = 0.$$

$$y'' = \frac{a(a+x)}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0 \text{ (} |x| < a \text{)},$$

故图形是凹的.

图形如图 2.113 所示.

图中主要点的坐

标:

$$A\left(-a, -\frac{\pi}{2}a\right),$$

$$B(0, -a),$$

$$C(0.67a, 0),$$

$$D\left(a, \frac{\pi}{2}a\right).$$

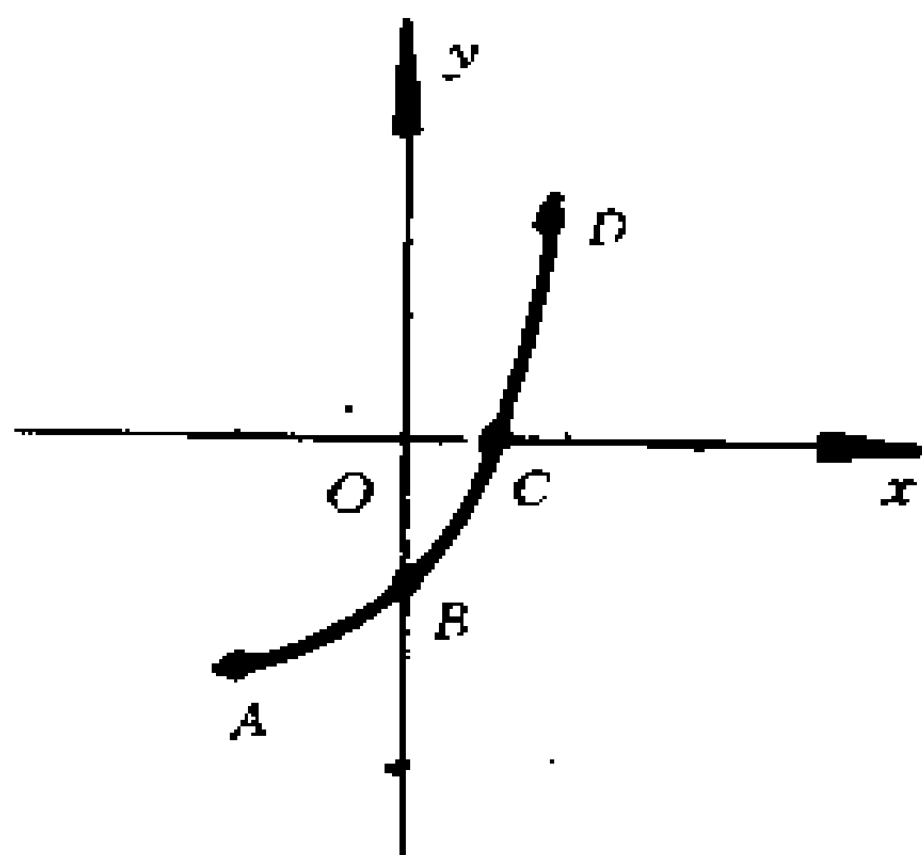


图 2.113

1525.  $y = \arccos \frac{1-x}{1-2x}.$

**解** 存在域:  $\left| \frac{1-x}{1-2x} \right| \leq 1$ , 两端平方之, 解得

$$x \leq 0 \text{ 或 } x \geq \frac{2}{3}.$$

渐近线:  $y = \frac{\pi}{3}$ . 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arccos \frac{1-x}{1-2x}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \arccos \frac{1-x}{1-2x} = \frac{\pi}{3}.$$

当  $x = 0$  时有边界的极小值  $y = 0$ ,

当  $x = \frac{2}{3}$  时有边界的极大值  $y = \pi$ .

$$y' = -\frac{\operatorname{sgn}(1-2x)}{(1-2x)\sqrt{3x^2-2x}},$$

$$y'' = \begin{cases} \frac{1}{(3x^2 - 2x)^{\frac{3}{2}} \cdot (1 - 2x)^2} \cdot (9x - 12x^2 - 1), & \text{当 } x \leq 0 \text{ 时;} \\ \frac{1}{(3x^2 - 2x)^{\frac{3}{2}} \cdot (1 - 2x)^2} (12x^2 - 9x + 1), & \text{当 } x \geq \frac{2}{3} \text{ 时.} \end{cases}$$

当  $x \leq 0$   
时,  $y'' < 0$ , 图形  
是凸的;

当  $x \geq \frac{2}{3}$   
时,  $y'' > 0$ , 图形  
是凹的.

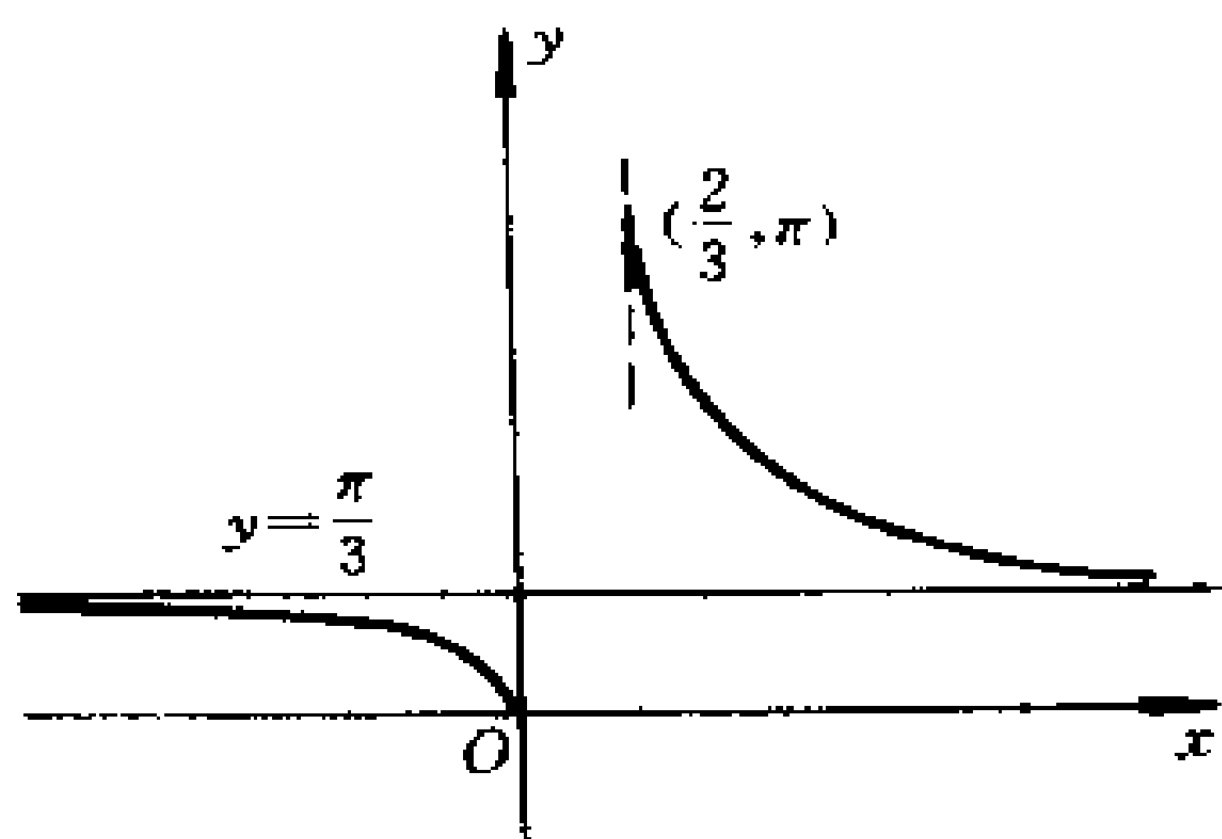


图 2.114

又当  $x < 0$   
时,  $y' < 0$ , 图形  
下降;

当  $x > \frac{2}{3}$  时,  $y' < 0$ , 图形也下降;

$$y' - (0) = -\infty, y' + \left(\frac{2}{3}\right) = -\infty.$$

图形如图 2.114 所示.

1526.  $y = x^x$ .

**解** 一般只讨论  $x > 0$ . 函数值始终为正的, 故图形在

$Ox$  轴的上方.

$$y' = x^x(1 + \ln x).$$

令  $y' = 0$  得  $x = \frac{1}{e} \approx 0.368$ . 经判别知此时有极小值

$$y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \approx 0.692.$$

$$y'' = x^x \left[ (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right] > 0, \text{图形是凹的.}$$

当  $x \rightarrow +0$  时有边界值  
 $y = 1$  (利用洛比塔法则求得).

图形如图 2.115 所示.

1527.  $y = x^{\frac{1}{x}}$ .

解 一般只讨论  $x > 0$ .

渐近线:  $y = 1$ . 事实

上,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}-1} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

当  $x \rightarrow +0$  时有边界的最小值  $y = 0$ .

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x). \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = e.$$

当  $x < e$  时,  $y' > 0$ , 图形上升,

当  $x > e$  时,  $y' < 0$ , 图形下降.

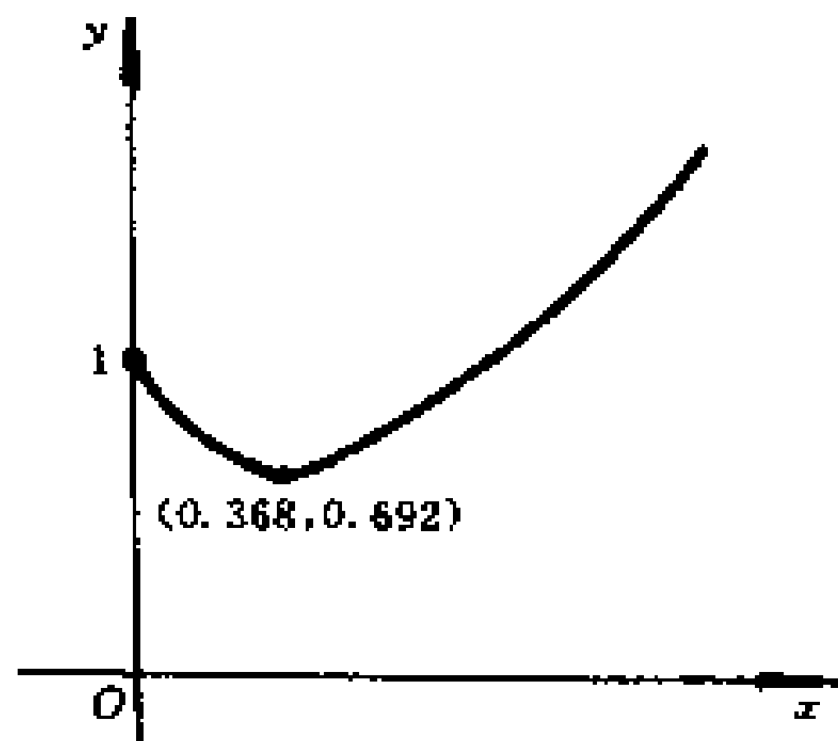


图 2.115

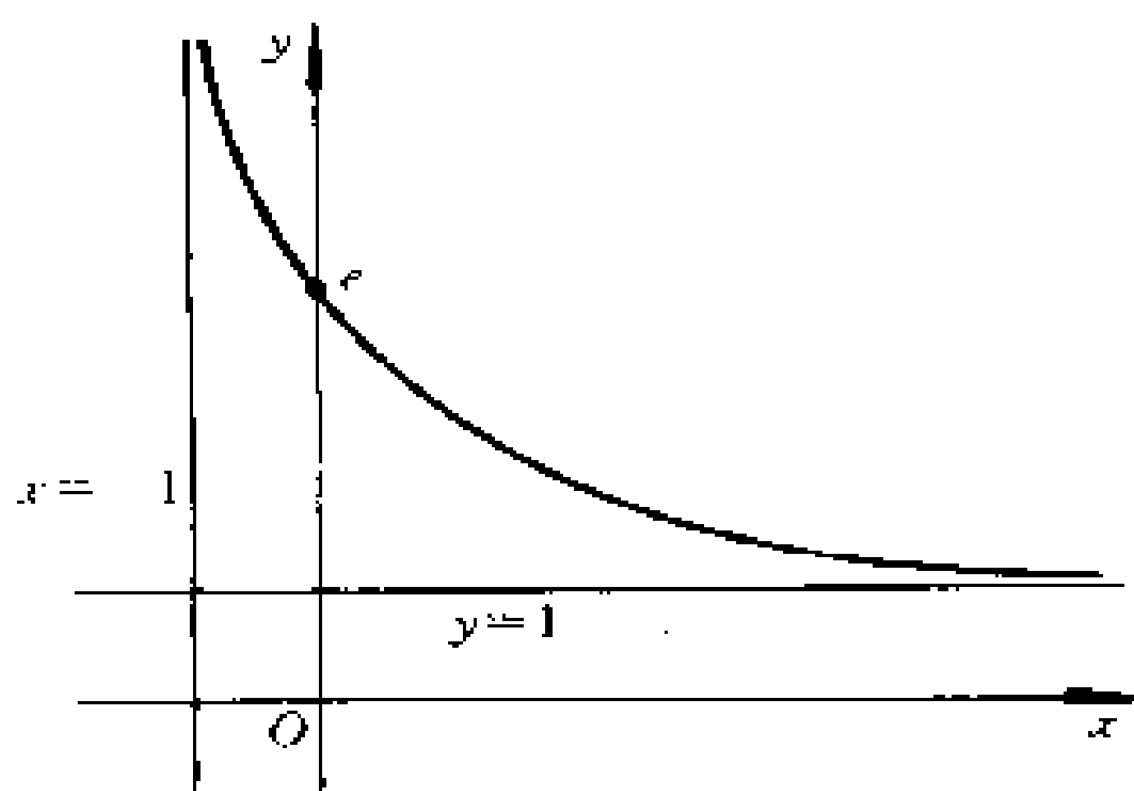


图 2.117

图形如图 2.117 所示.

1529.  $y = x \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \quad (x > 0).$

解  $y' = \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x + x \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right] > 0,$

易证  $\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} > 0 (x > 0)$ , 故  $y' > 0$ , 从而图形上升.

当  $x \rightarrow +0$  时, 有边界的最小值  $y = 0$ .

渐近线:  $y = e \left( x - \frac{1}{2} \right)$ . 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= -e \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right. \\
&\quad \left.+ O\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x+1}\right] = -\frac{e}{2}.
\end{aligned}$$

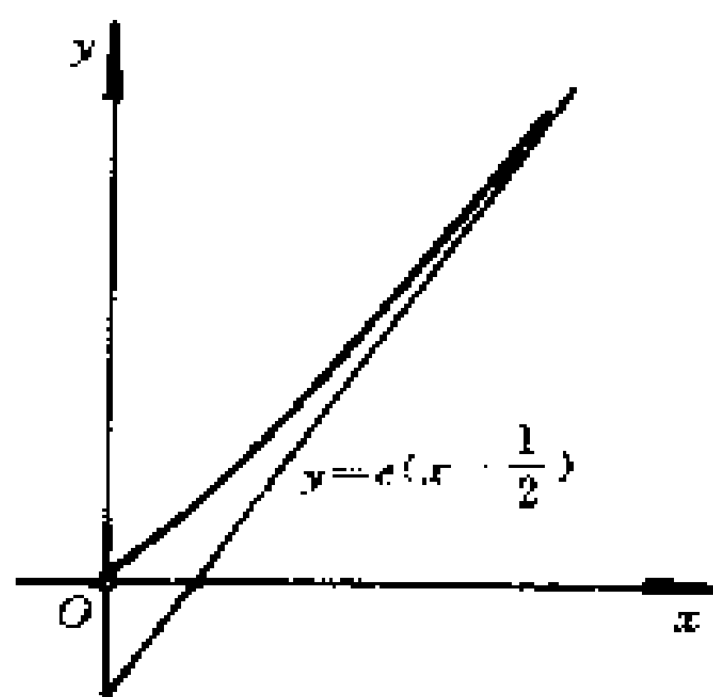


图 2.118

图形如图 2.118 所示.

1530.  $y = \frac{\frac{1}{e^{1-x^2}}}{1+x^2}$  (不研究凸凹性).

解 函数值始终为正的, 故图形在  $Ox$  轴的上方. 图形关于  $Oy$  轴对称.

不连续点:  $x = 1$  及  $x = -1$ .

$$y' = \frac{2x^3 e^{\frac{1}{1-x^2}} (3-x^2)}{(1-x^2)^2 (1+x^2)^2},$$

令  $y' = 0$  得  $x = 0$  或  $x = \pm \sqrt{3}$ .

经判别:

当  $x = 0$  时有极小值  $y = e$ ;

当  $x = \pm \sqrt{3}$  时有极大值  $y = \frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0.15$ ;



当  $x = \sqrt{3}$  时有极大值  $y = \frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0.15$ .

渐近线:  $y = 0$ ;  $x = -1$  及  $x = 1$ ;

图形如图 2.119 所示. 图中主要点的坐标:

$A(0, e)$ ,  $B(\sqrt{3}, 0.15)$ ,  $C(-\sqrt{3}, 0.15)$ .

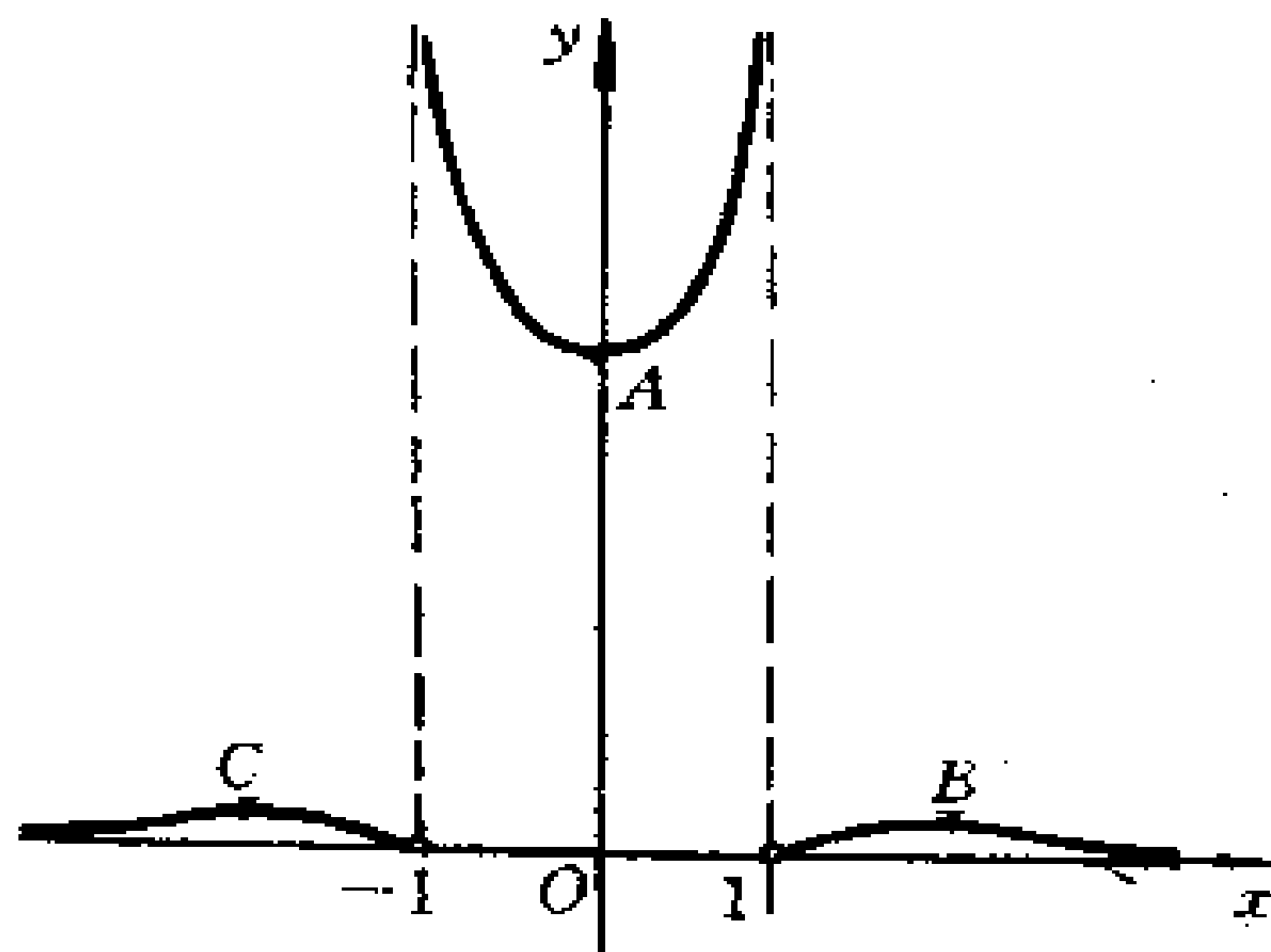


图 2.119

作出下列参数方程所表示的曲线:

1531.  $x = \frac{(t+1)^2}{4}$ ,  $y = \frac{(t-1)^2}{4}$ .

**解** 先把此参数方程化成直角坐标系下的方程.

$$\sqrt{x} = \frac{|t+1|}{2}, \quad \sqrt{y} = \frac{|t-1|}{2}.$$

当  $t \geq 1$  时,  $\sqrt{x} = \frac{t+1}{2}$ ,  $\sqrt{y} = \frac{t-1}{2}$ . 相减得

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 (x \geq 1, x > y); \quad (1)$$

当  $t \leq -1$  时,  $\sqrt{x} = \frac{-t-1}{2}$ ,  $\sqrt{y} = \frac{1-t}{2}$ . 因而

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = 1 (y \geq 1, y > x); \quad (2)$$

当  $-1 \leq t \leq 1$  时,  $\sqrt{x} = \frac{t+1}{2}$ ,  $\sqrt{y} = \frac{1-t}{2}$ , 相加得

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1). \quad (3)$$

由方程(1), (2) 及(3)

即得所给曲线的图形. 图形关于  $y = x$  对称, 如图

2. 120 所示.

图中主要点的坐标:

$A(1, 0), B(4, 1),$

$C(0, 1), D(1, 4),$

$E\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$

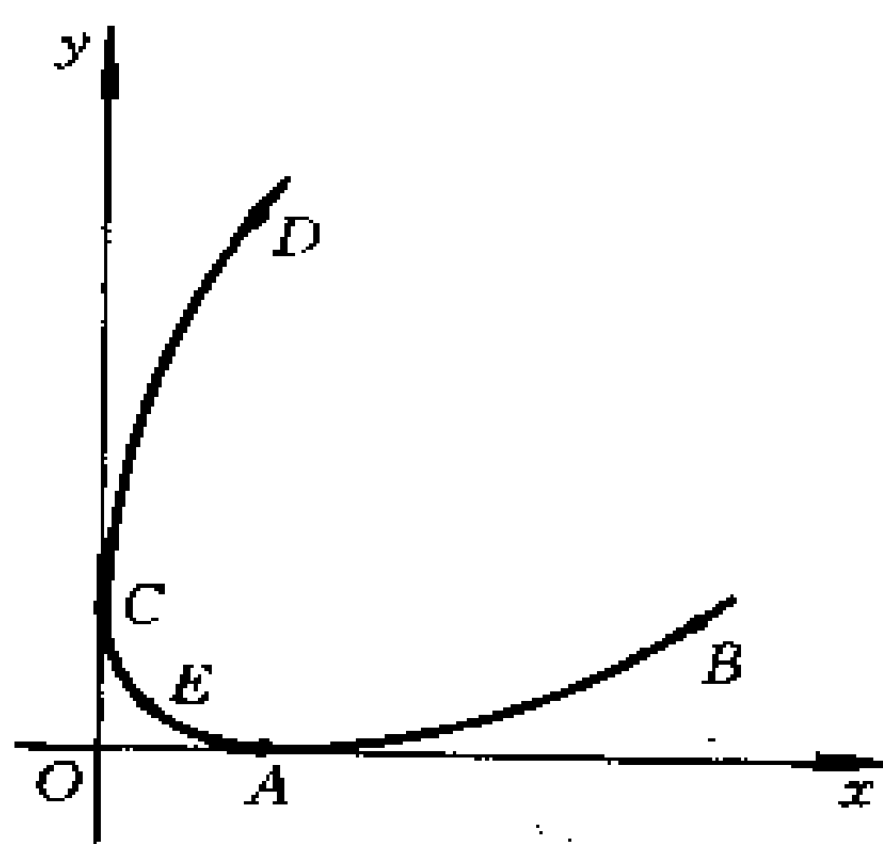


图 2. 120

1532.  $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3.$

解  $x'_t = 2(1-t), y'_t = 3(1-t^2).$  令  $x'_t = 0, y'_t = 0,$

得  $t = \pm 1.$

作下表:

$t$ 的区间	$x'_t$	$y'_t$	$x$	$y$
$(-\infty, -1)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 $-3$	由 $+\infty$ 下降到 $-2$
$(-1, 1)$	+	+	由 $-3$ 上升到 $1$	由 $-2$ 上升到 $2$
$(1, +\infty)$	-	-	由 $1$ 下降到 $-\infty$	由 $2$ 下降到 $-\infty$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(1-t^2)}{2(1-t)} = \frac{3}{2}(1+t) \quad (t \neq 1). \text{ 令 } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ 得}$$

$$t = -1, \text{ 此时 } x = -3, y = -2.$$

由于  $t = 1 \pm \sqrt{1-x}$ ,

故存在域为  $x \leq 1$ , 且图

形有两支, 又因  $\frac{d^2y}{dx^2} =$

$$\frac{3}{4(1-t)}, \text{ 故当 } t > 1 \text{ 时}$$

图形呈凸状, 而当  $t < 1$

时图形呈凹状.

当  $x = 0$  时,  $t = 0$

或  $t = 2$ , 此时  $y = 0$  或  $y$

$= -2$ .

当  $y = 0$  时,  $t = 0, +\sqrt{3}$  或  $-\sqrt{3}$ , 此时  $x = 0,$

$0.464$  或  $-6.464$ .

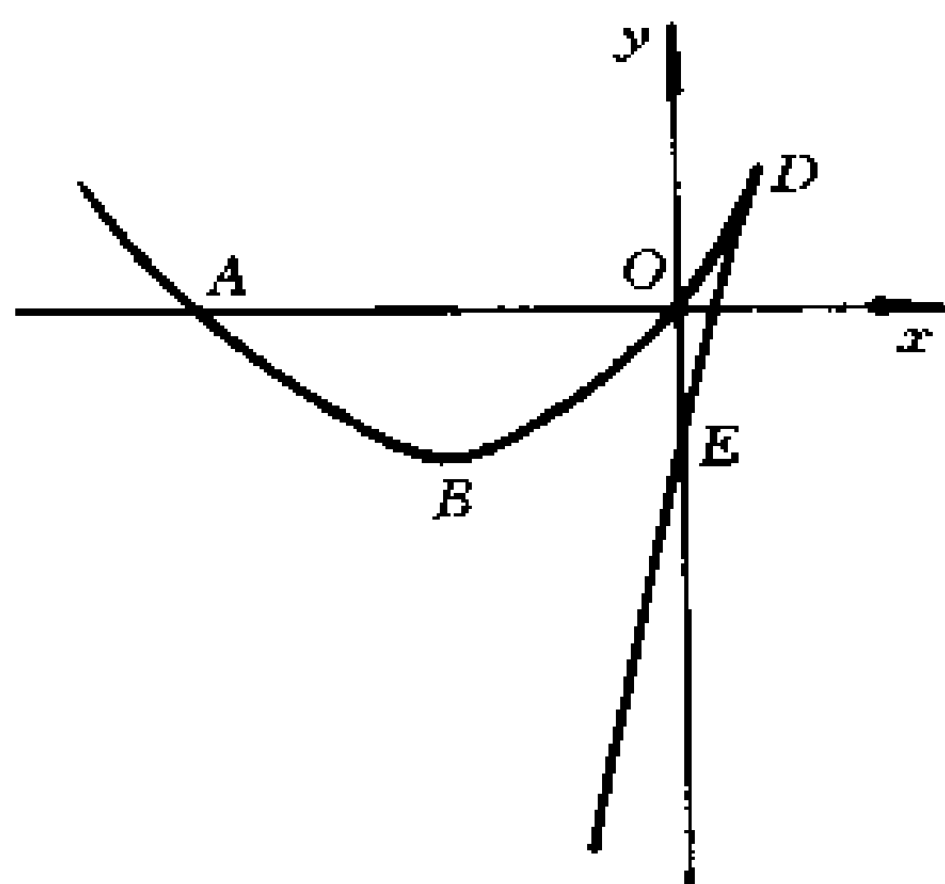


图 2.121

图形如图 2.121 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(-6.464, 0), B(-3, -2), D(1, 2), E(0, -2).$$

1533.  $x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t}{t^2-1}.$

**解**  $x'_t = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}, y'_t = -\frac{1+t^2}{(t^2-1)^2}.$  考虑  $x'_t = 0,$

$y'_t = 0$  及  $x'_t, y'_t$  趋于  $\infty$  的  $t$  值:  $t = 0, \pm 1$  及  $2.$

作下表:

$t$ 的范围	$x'_t$	$y'_t$	$x$	$y$
$(-\infty, -1)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 $-\frac{1}{2}$	由 0 下降到 $-\infty$
$(-1, 0)$	+	-	由 $-\frac{1}{2}$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0
$(0, 1)$	-	-	由 0 下降到 $-\infty$	由 0 下降到 $-\infty$
$(1, 2)$	-	-	由 $+\infty$ 下降到 4	由 $+\infty$ 下降到 $\frac{2}{3}$
$(2, +\infty)$	+	-	由 4 上升到 $+\infty$	由 $\frac{2}{3}$ 下降到 0

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+t^2}{t(t-2)(t+1)^2},$$

当  $x \in (-\infty, 0)$  及  $(4, +\infty)$  时,  $\frac{dy}{dx} < 0$ , 因而曲

线下降.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(t-1)^3(t^4+3t^2+4t+1)}{t^3(t-2)^3(t+1)^4}, \text{ 令 } \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ 得 } t$$

$\approx -0.33$ , 经判别此时对应于拐点  $(-0.08, 0.30)$ .

令  $\frac{dx}{dy} = 0$  得  $t = 0, 2$  及  $-1$ , 其中当  $t = 0$  及  $2$  时有垂直切线, 切点为  $(0, 0)$  及  $\left(4, \frac{2}{3}\right)$ . 当  $t = -1$  时,  $x = -\frac{1}{2}$ , 此为垂直渐近线. 事实上,

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} y = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t}{t^2 - 1} = \infty.$$

斜渐近线为  $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ . 事实上,

$$k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( y - \frac{x}{2} \right) = - \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t(t+2)}{2(t+1)} = -\frac{3}{4}.$$

又当  $x \rightarrow +\infty$ , 即当  $t \rightarrow 1+0$  时,  $y \rightarrow +\infty$  或当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $y \rightarrow 0$ ;

又当  $x \rightarrow -\infty$  时, 即当  $t \rightarrow -\infty$  时,  $y \rightarrow 0$  或当  $t \rightarrow 1-0$  时,  $y \rightarrow -\infty$ .

总之,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$  或  $0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$  或  $-\infty$ . 图形如图

2.122 所示. 图中主要点的坐标:

$$A\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right), B\left(4, \frac{2}{3}\right).$$

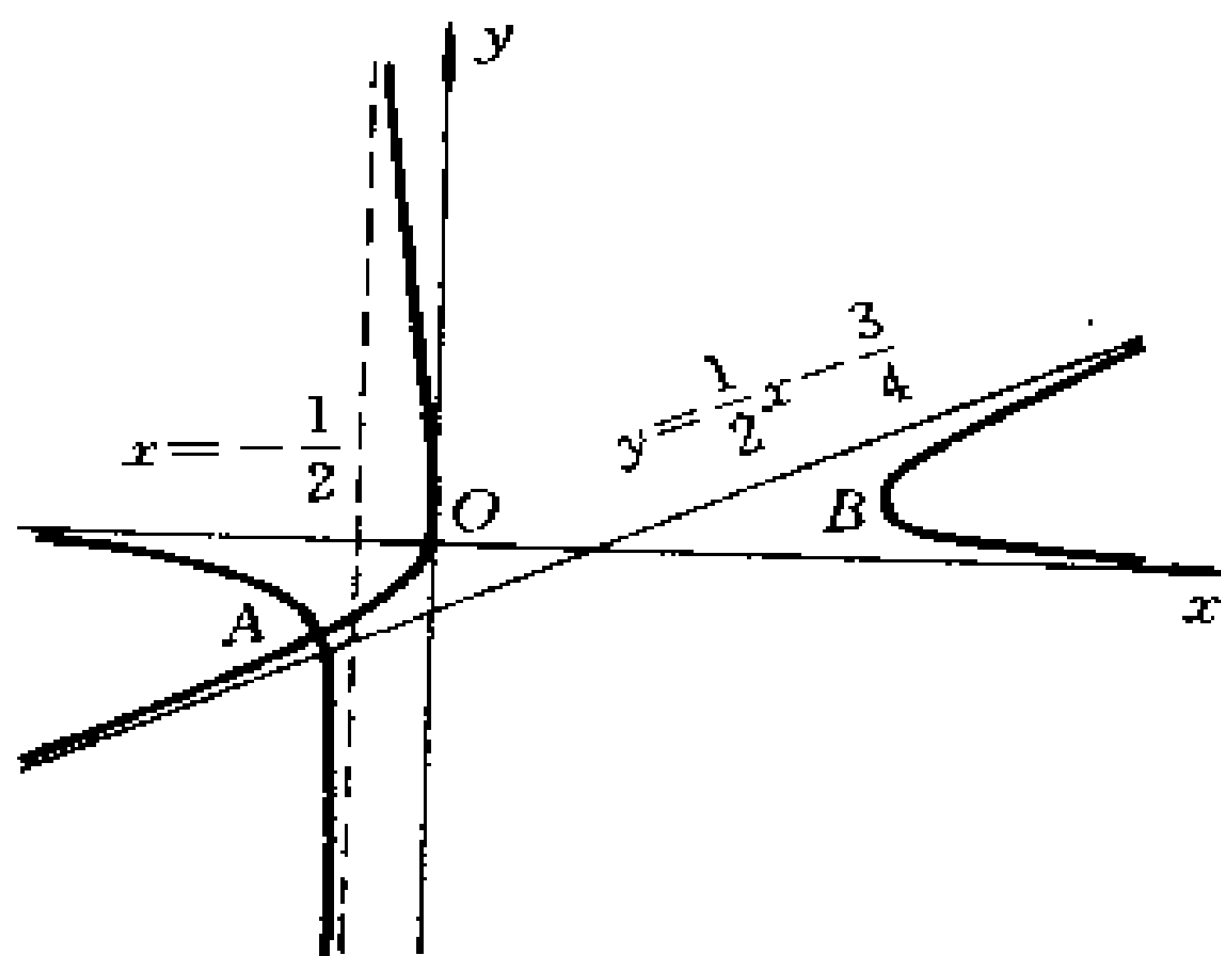


图 2.122

1534.  $x = \frac{t^2}{1-t^2}, y = \frac{1}{1+t^2}.$

**解** 由于以  $-t$  换  $t$ ,  $x$  及  $y$  值不变, 故只须考虑  $t$  的正值. 又因  $t^2 = \frac{x}{1+x}$ , 故  $x \geq 0$  或  $x \leq -1$ .

$$x'_t = \frac{2t}{(1-t^2)^2}, y'_t = \frac{-2t}{(1+t^2)^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = - \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 < 0, \text{ 曲线下降.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3}, \text{ 当 } |t| < 1 \text{ 时图形呈凹状, 当 } |t| > 1$$

时图形呈凸状.

考虑  $x'_t = 0, y'_t = 0$  及  $x'_t, y'_t$  趋于  $\infty$  的  $t$  值:

$$t = 0, t = 1.$$

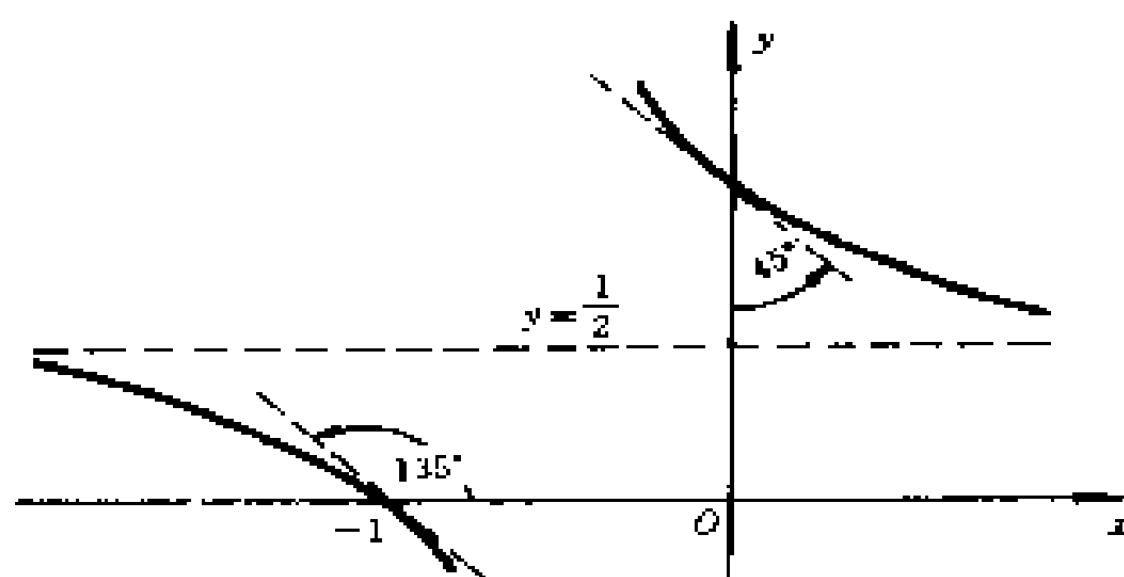


图 2.123

作下表:

$t$ 的范围	$x'$	$y'$	$x$	$y$
$(0, 1)$	+	-	由 0 上升到 $+\infty$	由 1 下降到 $\frac{1}{2}$
$(1, +\infty)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 -1	由 $\frac{1}{2}$ 下降到 0

渐近线为  $y = \frac{1}{2}$ . 事实上

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow \pm 1} \frac{1 - t^2}{t^2(1 + t^2)} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow \pm 1} \frac{1}{1 + t^2} = \frac{1}{2}.$$

在点  $(-1, 0)$  处 ( $t = +\infty$ ),  $\frac{dy}{dx} = -1$ ; 而在点  $(0, 1)$  处

( $t = 0$ ) 仍有  $\frac{dy}{dx} = -1$ . 这说明在这两点处的切线均与

$Ox$  轴成  $135^\circ$  的角. 这两点且为边界极值点.

图形如图 2.123 所示.

解 由于  $a\cos 2(t+2\pi) = a\cos 2t$  及  $a\cos 3(t+2\pi) = a\cos 3t$ . 因此, 我们只须考虑  $t$  在  $(0, 2\pi)$  内变化时,  $x$  及  $y$  的变化情况.

$$x'_t = -2a\sin 2t,$$

$$y'_t = -3a\sin 3t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\sin 3t}{2\sin 2t}.$$

考虑  $x'_t = 0, y'_t = 0$  的值:

$$t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3},$$

$$\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3} \text{ 及 } 2\pi.$$

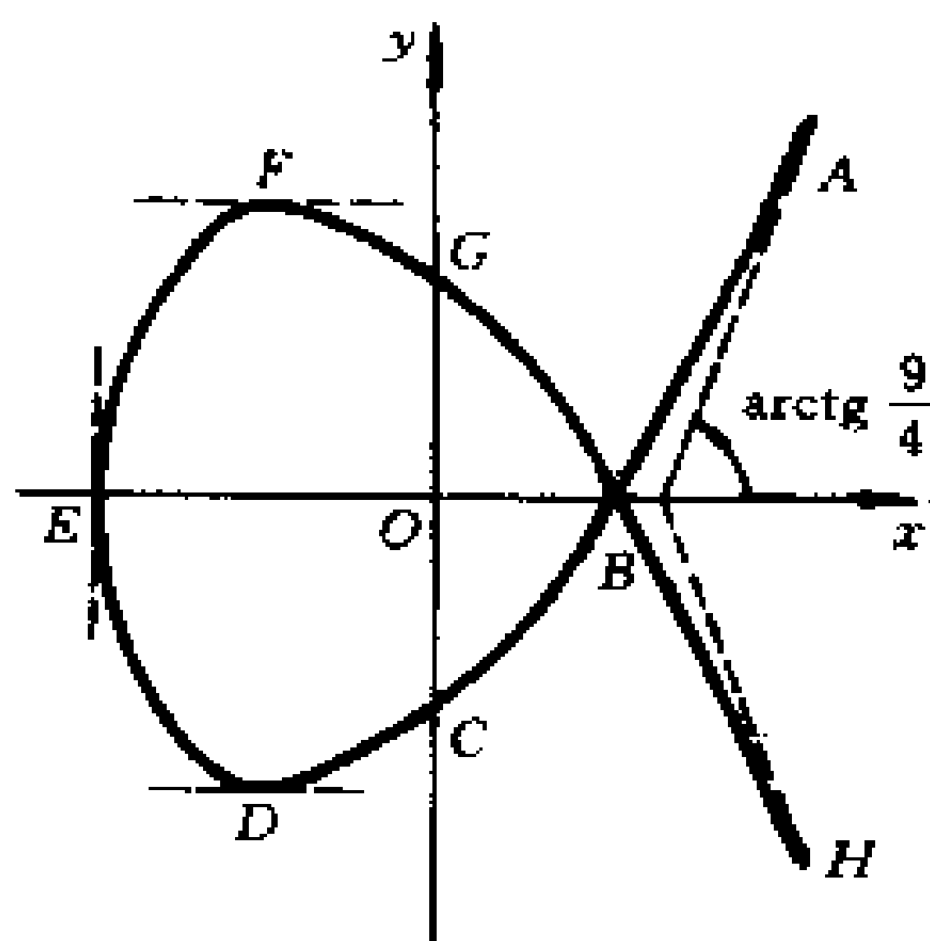


图 2.125

作下表:

$t$ 的范围	$x'_t$	$y'_t$	$x$	$y$	$\frac{dy}{dx}$	图形
$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$	-	-	由 $a$ 下降到 $-\frac{a}{2}$	由 $a$ 下降到 $-a$	+	上升
$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$	-	+	由 $-\frac{a}{2}$ 下降到 $-a$	由 $-a$ 上升到 $0$	-	下降
$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$	+	+	由 $-a$ 上升到 $-\frac{a}{2}$	由 $0$ 上升到 $a$	+	上升
$\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$	+	-	由 $-\frac{a}{2}$ 上升到 $a$	由 $0$ 下降到 $-a$	-	下降
$\left(\pi, \frac{4\pi}{3}\right)$	-	+	由 $a$ 下降到 $-\frac{a}{2}$	由 $-a$ 上升到 $a$	-	下降



(续表)

$t$ 的范围	$x'_t$	$y'_t$	$x$	$y$	$\frac{dy}{dx}$	图形
$\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$	-	-	由 $-\frac{a}{2}$ 下降到 $-a$	由 $a$ 下降到 $0$	+	上升
$\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$	+	-	由 $-a$ 上升到 $-\frac{a}{2}$	由 $0$ 下降到 $-a$	-	下降
$\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$	+	+	由 $-\frac{a}{2}$ 上升到 $a$	由 $-a$ 上升到 $a$	+	上升

当  $t = \frac{\pi}{3}$  时,  $\frac{dy}{dx} = 0$ , 此时  $x = -\frac{a}{2}$ ,  $y = -a$ ;

当  $t = \frac{\pi}{2}$  时,  $\frac{dy}{dx} = \infty$  ( $t$  从小于  $\frac{\pi}{2}$  趋于  $\frac{\pi}{2}$  时,  $\frac{dy}{dx} = -\infty$ ;

从大于  $\frac{\pi}{2}$  趋于  $\frac{\pi}{2}$  时,  $\frac{dy}{dx} = +\infty$ ), 此时  $x = -a$ ,  $y = 0$ ;

当  $t = \frac{2\pi}{3}$  时,  $\frac{dy}{dx} = 0$ , 此时  $x = -\frac{a}{2}$ ,  $y = a$ ;

当  $t = \pi$  时, 利用洛比塔法则可求得  $\frac{dy}{dx} = -\frac{9}{4}$ , 此时  $x = a$ ,  $y = -a$ ;

当  $t = 0$  时, 利用洛比塔法则可求得  $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{4}$ , 此时  $x = y = a$ .

图形如图 2.125 所示, 图中主要点的坐标:

$$A(a, a), B\left(\frac{a}{2}, 0\right), C\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a\right),$$

$$D\left(-\frac{a}{2}, -a\right), E(-a, 0), F\left(-\frac{a}{2}, a\right),$$

$$G\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right), H(a, a).$$

1537.  $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t.$

**解**  $\sqrt{x} = \cos^2 t, \sqrt{y} = \sin^2 t$   
 $= \sin^2 t$ , 相加即得  $\sqrt{x} +$   
 $\sqrt{y} = 1$ . 图形如图 2.126  
 所示\*).

\* ) 参看 1531 题.

1538.  $x = t \ln t, y = \frac{\ln t}{t}.$

**解** 当  $t > 0$  时,  $x$  及  $y$  才  
 有意义.

当  $0 < t \leq 1$  时, 令  $t' = \frac{1}{t}$ , 则  $t' \geq 1$ , 且  $x = -\frac{\ln t'}{t'}$ ,  
 $y = -t' \ln t'$ , 所以, 图形关于直线  $x + y = 0$  对称.

以下讨论图形的极值点, 凹凸性及拐点, 不妨设  $t \geq 1$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \ln t}{t^2(1 + \ln t)}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\ln^2 t - 4}{t^3(1 + \ln t)^2}.$$

令  $1 - \ln t = 0$ , 得  $t = e$ . 经判别此时图形有极大值点:

$$A\left(e, \frac{1}{e}\right).$$

令  $\ln^2 t - 2 = 0$ , 得  $t = e^{\sqrt{2}}$ , 相应的点

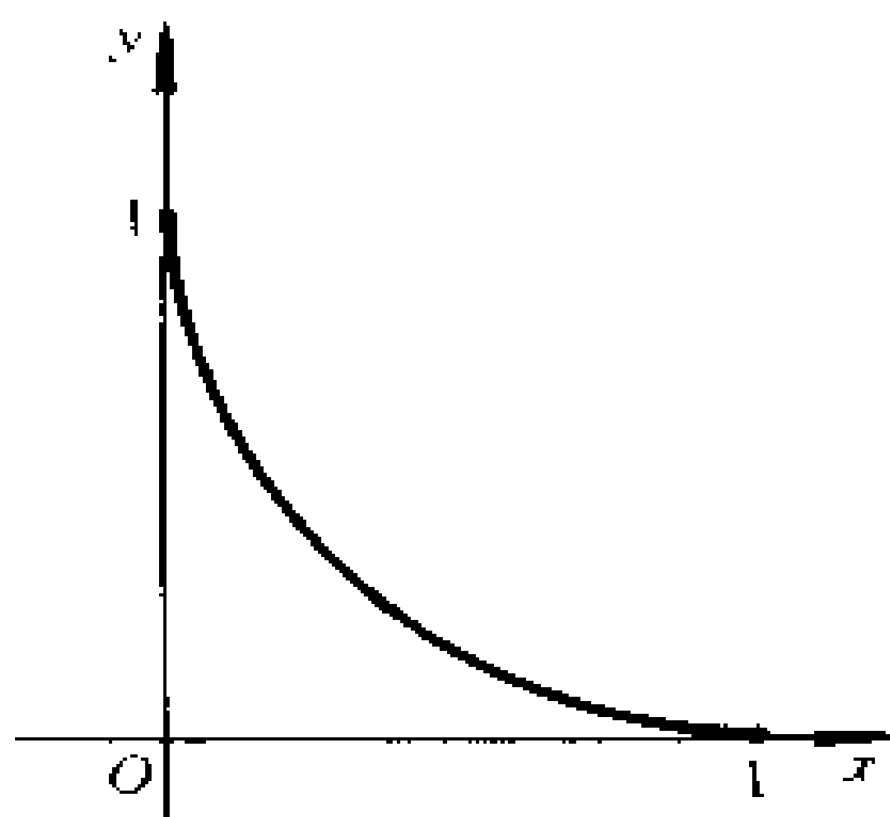


图 2.126

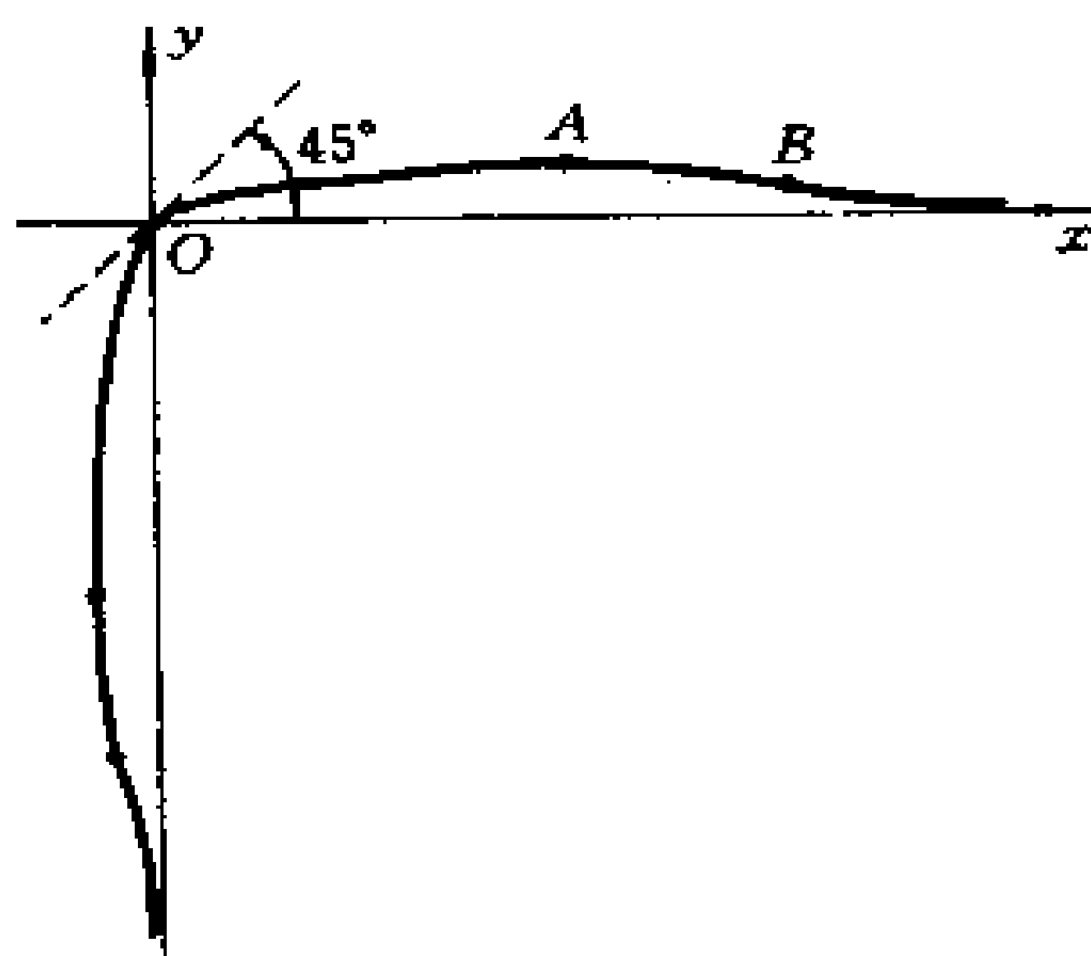


图 2.127

$B\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$  为图形的拐点.

当  $1 \leq t \leq e^{\sqrt{2}}$ , 即当  $0 \leq x \leq \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$  时, 图形呈凸状. 当  $t \geq e^{\sqrt{2}}$ , 即当  $x \geq \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$  时, 图形呈凹状.

作下表:

$t$ 的范围	$x'_t$	$y'_t$	$x$	$y$	$\frac{dy}{dx}$	图形
$\left(0, \frac{1}{e}\right)$	-	+	由 0 下降到 $-\frac{1}{e}$	由 $-\infty$ 上升到 $-e$	-	下降
$\left(\frac{1}{e}, e\right)$	+	+	由 $-\frac{1}{e}$ 上升到 $e$	由 $-e$ 上升到 $\frac{1}{e}$	+	上升
$(e, +\infty)$	+	-	由 $e$ 上升到 $+\infty$	由 $\frac{1}{e}$ 下降到 0	-	下降

曲线通过点  $(0,0)$ , 在此点切线的倾角为  $45^\circ$ .

水平渐近线为  $y = 0$ . 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{t}}{1} = 0,$$

垂直渐近线为  $x = 0$ . 事实上,

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{t \rightarrow +0} y = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\ln t}{t} = -\infty,$$

图形如图 2.127 所示.

1539.  $x = \frac{a}{\cos^3 t}, y = a \operatorname{tg}^3 t (a > 0).$

**解** 将此参数方程化为直角坐标系下的方程:

$$x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

显然,  $|x| \geq a$ . 且图形对于两坐标轴都对称, 故只须考虑在第一象限部分的函数图形. 由于

$$y' = x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}, y'' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} (y^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}).$$

而当  $x > 0, y > 0$  时, 有  $x > y$ . 从而有

$$y' > 0, y'' > 0,$$

故图形上升且呈凹状.

在  $(a, 0)$  点的切线的倾角为  $0^\circ$ . 图形如图 2.128 所示.

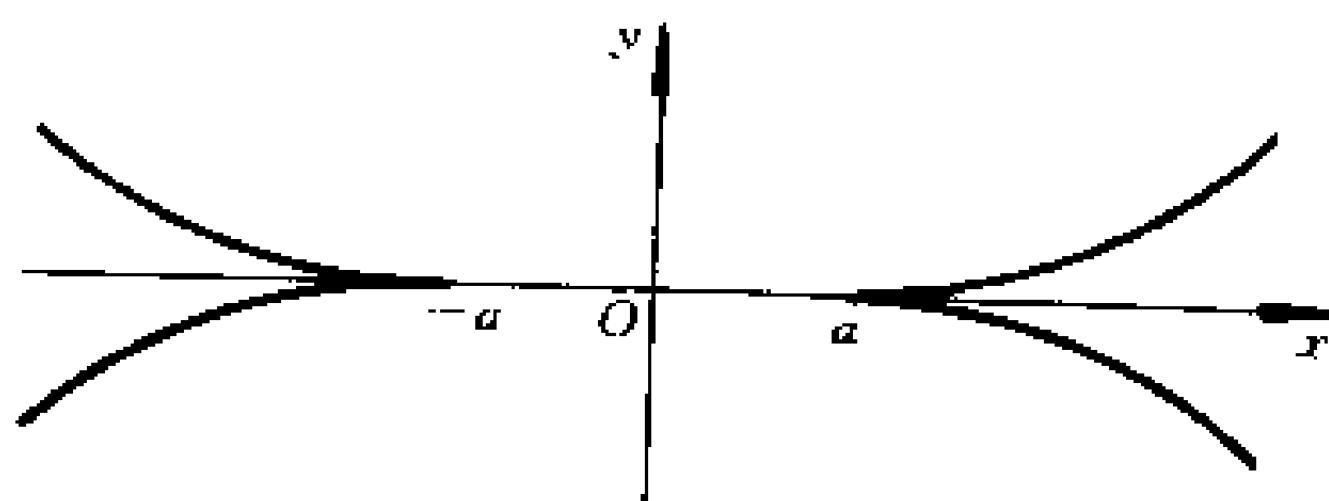


图 2.128

1540.  $x = a(\operatorname{sh} t - t), y = a(\operatorname{ch} t - 1) \quad (a > 0).$

**解** 当  $t$  用  $-t$  换时,  $x$  的大小不变符号相反, 而  $y$  却不变, 故图形对于  $Oy$  轴对称.

$$x'_t = a(\operatorname{ch} t - 1), \quad y'_t = a \operatorname{sh} t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^t + 1}{e^t - 1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4e^{2t}}{a(e^t - 1)^3}.$$

作下表:

$t$ 的范围	$x'_t$	$y'_t$	$x$	$y$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	图形
$(-\infty, 0)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0	-	-	下降
$(0, +\infty)$	+	+	由 0 上升到 $+\infty$	由 0 上升到 $+\infty$	+	-	上升

当  $t \rightarrow -0$  时,  $x \rightarrow -0, \frac{dy}{dx} \rightarrow -\infty$ ;

当  $t \rightarrow +0$  时,  $x \rightarrow +0, \frac{dy}{dx} \rightarrow +\infty$ . 因此在  $(0, 0)$  点的切

线垂直于  $Ox$  轴.

图形如图 2.129 所示.

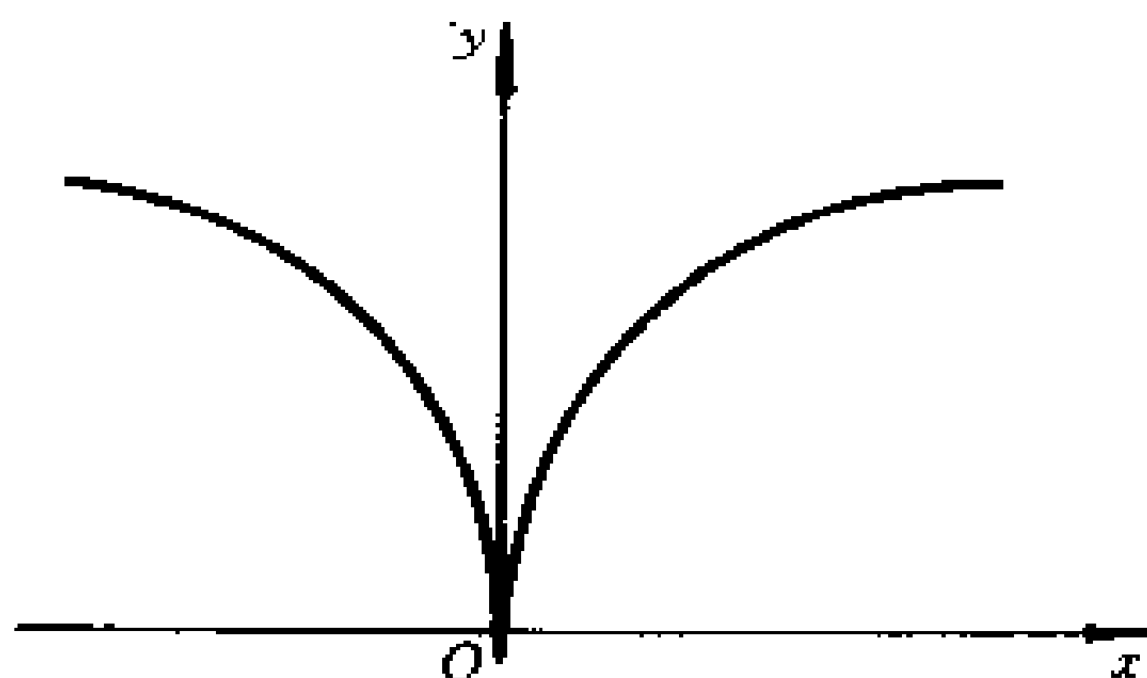


图 2.129

把下列曲线方程变成参数式,然后作出这些曲线:

1541.  $x^3 + y^3 - 3axy = 0 (a > 0).$

**解** 设  $y = tx$ , 代入方程, 并消去  $x^2$ , 即得

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

由于

$$x'_t = \frac{6a\left(\frac{1}{2} - t^3\right)}{(1+t^3)^2}, y'_t = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

考虑  $x'_t = 0, y'_t = 0$  及  $x'_t, y'_t$  趋于无穷的  $t$  值:

$$t = -1, 0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ 及 } \sqrt[3]{2}.$$

作下表:

$t$ 的范围	$x'$	$y'$	$x$	$y$
$(-\infty, -1)$	+	-	由 0 上升到 $+\infty$	由 0 下降到 $-\infty$
$(-1, 0)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0
$(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	+	+	由 0 上升到 $\sqrt[3]{4a}$	由 0 上升到 $\sqrt[3]{2a}$
$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2})$	-	+	由 $\sqrt[3]{4a}$ 下降到 $\sqrt[3]{2a}$	由 $\sqrt[3]{2a}$ 上升到 $\sqrt[3]{4a}$
$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$	-	-	由 $\sqrt[3]{2a}$ 下降到 0	由 $\sqrt[3]{4a}$ 下降到 0

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)},$$

当  $t = 0$  时,  $x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = 0$ ; 当  $t \rightarrow +\infty$  时,

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t(2-t^3)}{2(\frac{1}{2}-t^3)} = \infty. \text{ 这说明,}$$

坐标原点是曲线的二重点. 曲线的一支与  $Ox$  轴相切, 一支与  $Oy$  轴相切.

渐近线:  $x + y + a = 0$ . 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)} = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at^2 + 3at}{1 + t^3} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{6at + 3a}{3t^2} \\ = -a.$$

图形如图 2.130 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(a \sqrt[3]{4}, a \sqrt[3]{2}),$$

$$B\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right),$$

$$C(a \sqrt[3]{2}, a \sqrt[3]{4}).$$

1542.  $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$ .

**解** 显见曲线关于两坐标轴对称, 同时关于直线  $y = x$  对称.

设  $x = ty$ , 则当

$y \neq 0$  时, 得

$$y = \pm \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t^4 + 1}}.$$

根据对称性, 不妨限于考察方程

$$\begin{cases} x = t \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t^4 + 1}}, \\ y = \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t^4 + 1}}. \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

由于  $0 \leq x \leq 1, x \leq y$ , 故曲线界于纵轴正半轴与直线  $y = x$  之间, 由此根据对称性即可作出全部图形. 当  $t$  由 0 连续变到 1 时, 曲线上的点  $(0, 1)$  连续变化到点

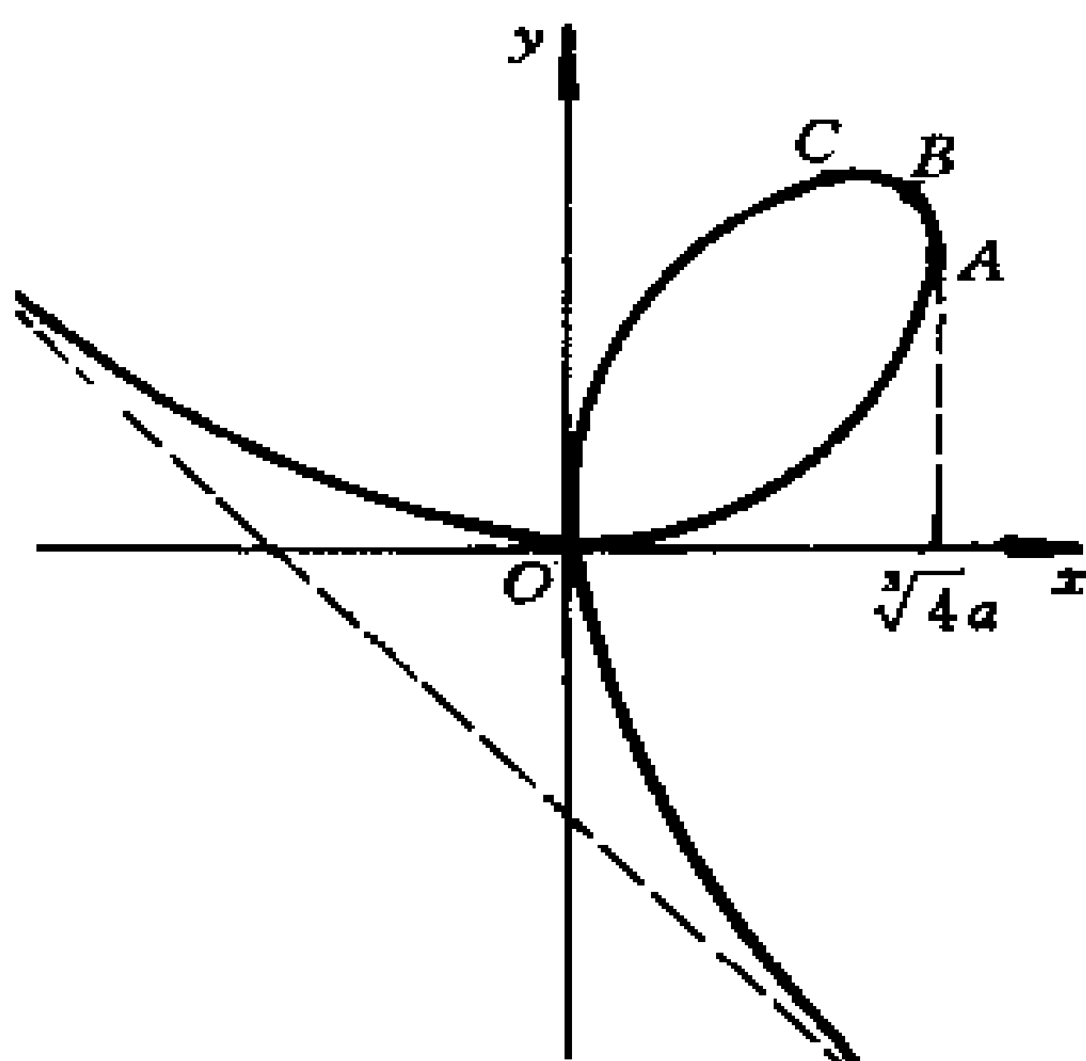


图 2.130



$t$	0	0.2	0.4	0.6	$\sqrt{\sqrt{2}-1}$	0.8	0.9	1
$x$	0	0.20	0.42	0.65	0.71	0.86	0.94	1
$y$	1	1.02	1.06	1.09	1.10	1.08	1.04	1

曲线与两坐标轴的交点为 $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ 及 $(0, -1)$ , 如图 2.131 所示.

1543.  $x^2y^2 = x^3 - y^3$ .

**解** 设  $y = tx$ , 代入原方程, 即得

$$x = \frac{1-t^3}{t^2},$$

$$y = \frac{1-t^3}{t} (t \neq 0).$$

$$x'_t = -\frac{2+t^3}{t^3}, y'_t = -\frac{1+2t^3}{t^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(1+2t^3)}{2+t^3}.$$

令  $x'_t = 0$ ,  $y'_t = 0$  及  $x'_t, y'_t$  趋于  $\infty$ , 得

$$t = -\sqrt[3]{2}, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0.$$

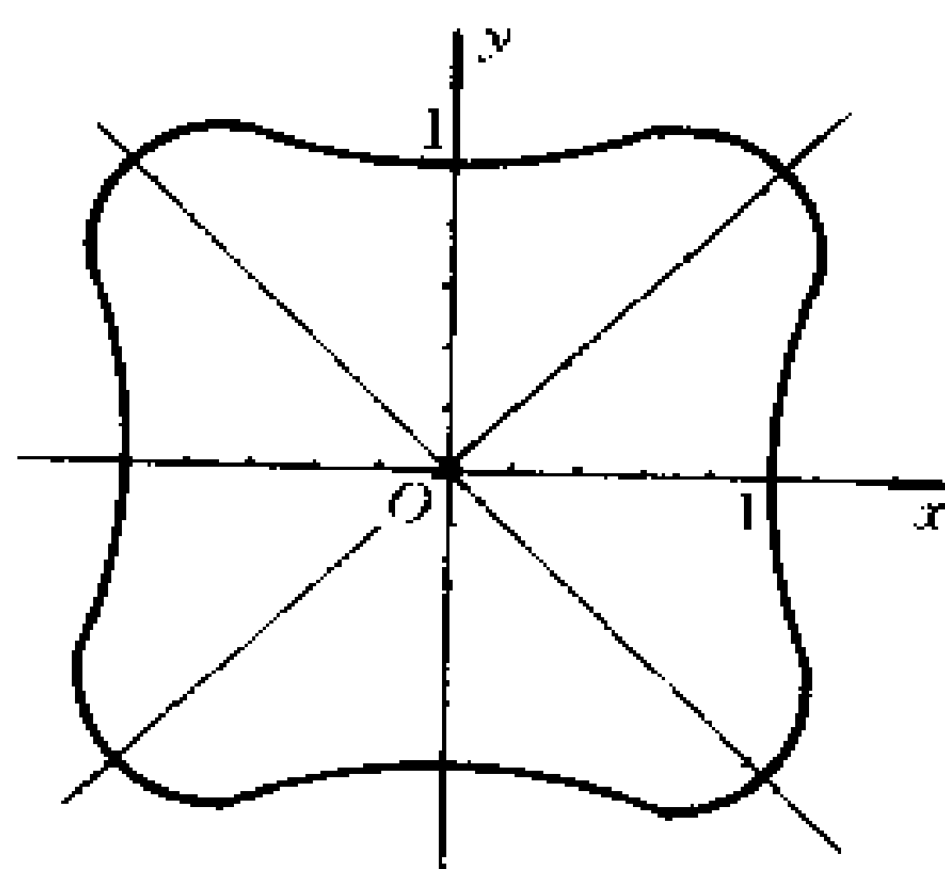


图 2.131

作下表:

$t$ 的范围	$x'$	$y'$	$x$	$y$	$\frac{dy}{dx}$	图形
$(-\infty, -\sqrt[3]{2})$	-	+	由 $+\infty$ 下降到 $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	由 $-\infty$ 上升到 $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	-	下降
$(-\sqrt[3]{2}, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	+	+	由 $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ 上升到 $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	由 $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ 上升到 $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	+	上升
$(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0)$	+	-	由 $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ 上升到 $+\infty$	由 $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ 下降到 $-\infty$	-	下降
$(0, +\infty)$	-	-	由 $+\infty$ 下降到 $-\infty$	由 $+\infty$ 下降到 $-\infty$	+	上升

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=-\sqrt[3]{2}} = \infty, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = 0,$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = 1.$$

图形通过点  $A\left(\frac{3}{\sqrt[3]{4}}, -\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)$ ,  $B\left(\frac{3}{\sqrt[3]{2}}, -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$ , 及  $O(0,0)$ . 如图 2.132 所示.

1544.  $x^y = y^x (x > 0, y > 0)$ .

**解** 由方程显见直线  $y = x$  是图形的一部分. 对于  $y \neq x$  的部分, 图形显然关于直线  $y = x$  对称.

设  $x = (1+t)^{\frac{1}{t}}$ , 则  $y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}$ , 即当  $x \neq y$  时, 曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = (1+t)^{\frac{1}{t}}, \\ y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}. \end{cases}$$

由条件  $x > 0, y > 0$  知,  $t$  满足  $-1 < t < +\infty$ ,

由于

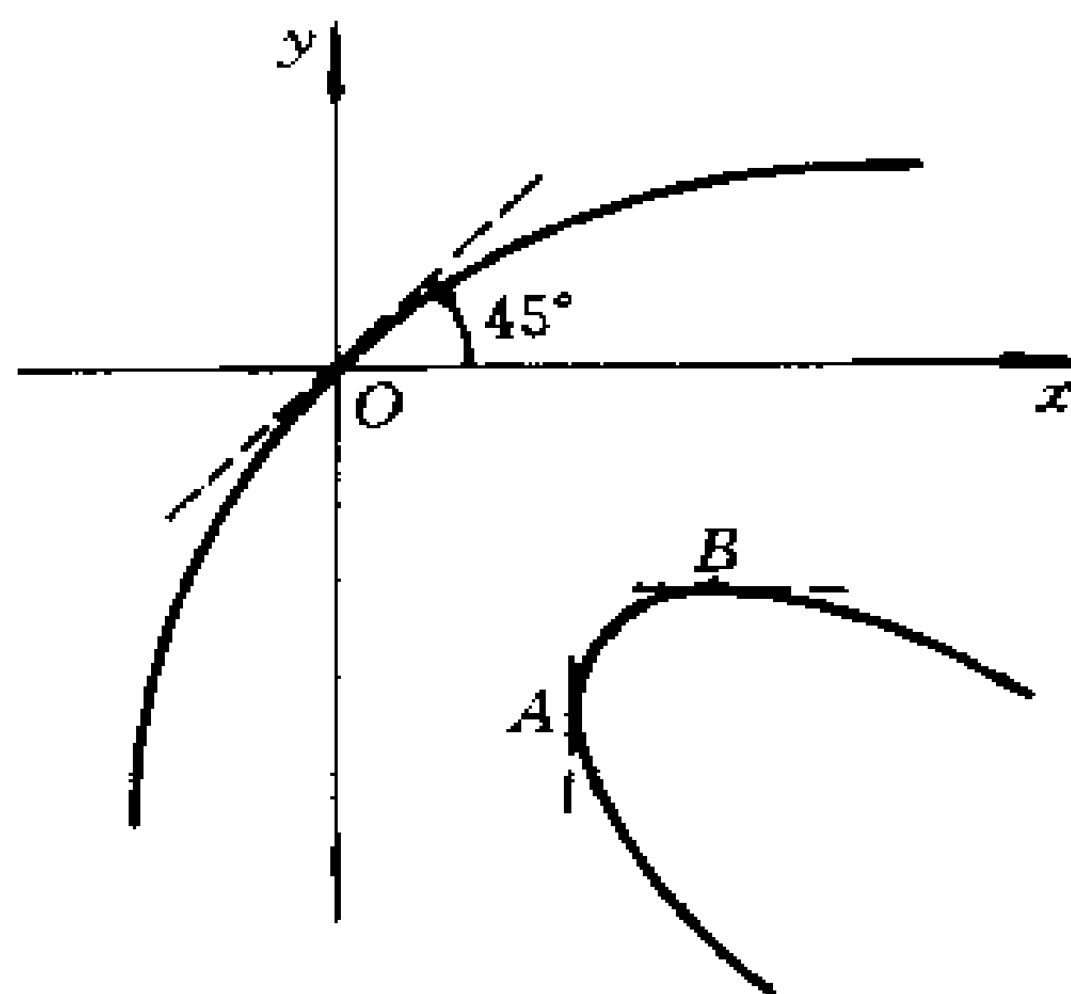


图 2.132

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} x = \lim_{t \rightarrow -1+0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} y = \lim_{t \rightarrow -1+0} (1+t)^{1+\frac{1}{t}} = 1;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x = 1, \lim_{t \rightarrow +\infty} y = +\infty,$$

故直线  $x = 1$  和  $y = 1$  是曲线的渐近线. 又因

$$\lim_{t \rightarrow 0} x = \lim_{t \rightarrow 0} y = e,$$

故点  $(e, e)$  是曲线上的二重点. 由于

$$\frac{dy}{dt} = (1+t)^{1+\frac{1}{t}} \left[ \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \right],$$

$$\frac{dx}{dt} = (1+t)^{\frac{1}{t}} \left[ \frac{t - (1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)} \right],$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = (1+t) \left[ 1 + \frac{t^2}{t - (1+t)\ln(1+t)} \right].$$

容易证明:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = -1,$$

并且当  $t \in (0, +\infty)$ , 从而  $x \in (1, e)$  时, 恒有  $\frac{dy}{dx} < 0$ .

事实上, 设

$$g(t) = t^2 - [(1+t)\ln(1+t) - t],$$

则  $g(0) = 0$ , 并且容易证明

$$g'(t) = 2t - \ln(1+t) > 0,$$

$$(1+t)\ln(1+t) - t > 0.$$

从而, 有

$$g(t) = t^2 - [(1+t)\ln(1+t) - t] > 0,$$

即

$$\frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t) - t} > 1.$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = (1+t) \left[ 1 - \frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t) - t} \right] < 0.$$

由对称性知, 对于  $t \in (-1, 0)$ , 也有  $\frac{dy}{dx} < 0$ . 而当  $t = 0$  时, 有

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = -1,$$

所以, 曲线始终是单调下降的, 并呈凹状, 无极值和拐点. 对应于  $t$  的变化范围 0 至 1.

计算几点坐标如下:

$t$	0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-0.9	$t \rightarrow -1$
$x$	$e$	3.05	3.59	4.50	7.48	12.9	$x \rightarrow +\infty$
$y$	$e$	2.44	2.15	1.84	1.49	1.29	$y \rightarrow 1$

综上所述, 曲线的图形由两部分组成, 一部分是直线, 另一部分是对称于直线  $y = x$  的曲线(图 2.133).

1545. 作出曲线  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y = 1$  的图形.

**解** 显见曲线的图形关于两坐标轴是对称的, 故只须在第一象限  $x \geq 0, y \geq 0$  范围内进行讨论. 考虑渐近线:

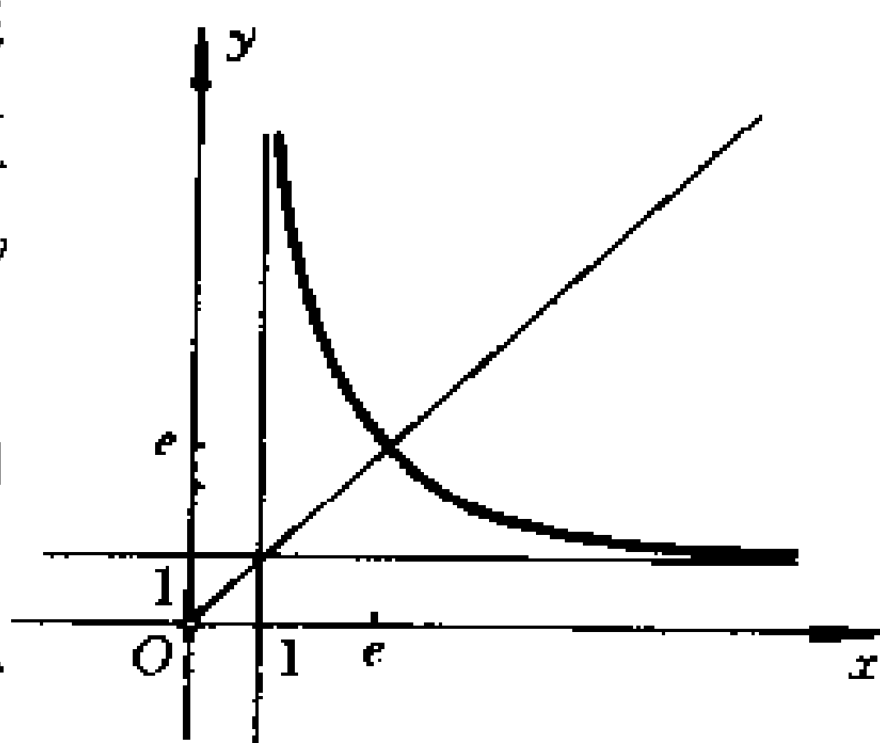


图 2.133

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1})}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}} \left( \operatorname{ch} x + \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}} \operatorname{ch} x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 x + 1}{\operatorname{sh}^2 x - 1}} = 1.\end{aligned}$$

为求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x)$ , 令

$$u = y - x = \ln(\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}) - x.$$

因为

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} e^u &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}}{e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} x + \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}}}{e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1})}{e^x \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}} = 1,\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = 0.$$

因此, 直线  $y = x$  是原曲线的渐近线.

因为当  $y = 0$  时  $\operatorname{ch} y$  取最小值  $\operatorname{ch} y = 1$ , 所以,  $x$  必须满足

$$\operatorname{ch}^2 x \geq 2 \text{ 或 } |x| \geq \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0.88,$$

并且当  $y = 0$  时,  $|x| = \ln(1 + \sqrt{2})$ .

曲线方程也可表示成

$$(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y)(\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y) = 1,$$

从而令

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = t,$$

即

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = \frac{1}{t}.$$

所以, 对于第一象限部分的曲线方程可表示为

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x = \frac{t + \frac{1}{t}}{2}, \\ \operatorname{ch} y = \frac{\frac{1}{t} - t}{2}, \end{cases} \quad (0 < t \leq \sqrt{2} - 1).$$

由原方程知

$$2\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x - 2\operatorname{ch} y \operatorname{sh} y \cdot y' = 0$$

或

$$y' = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} y \operatorname{sh} y} > 0.$$

因而, 曲线是单调上升的.

又由于

$$y'' = \frac{(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{ch} y \operatorname{sh} y - (\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{ch}^2 y) \cdot y' \cdot \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x}{(\operatorname{ch} y \operatorname{sh} y)^2}$$

$$= \frac{(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{ch}^2 y \operatorname{sh}^2 y - (\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{ch}^2 y) \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x}{(\operatorname{ch} y \operatorname{sh} y)^3},$$

而

$$\begin{aligned} & (\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{ch}^2 y \operatorname{sh}^2 y - (\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{ch}^2 y) \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x \\ &= \operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y (\operatorname{sh}^2 y - \operatorname{sh}^2 x) + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x) \\ &= \operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x) + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x) \\ &= (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x) (\operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y) \\ &= -(\operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y) < 0. \end{aligned}$$

于是,  $y'' < 0$  恒成立. 所以, 曲线呈凸状.

计算几点的坐标如下:

$t$	$\sqrt{2} - 1$	0.4	0.3	0.2	0.1	$t \rightarrow 0$
$x$	$\ln(1 + \sqrt{2})$	0.92	1.07	1.61	2.31	$x \rightarrow +\infty$
$y$	0	0.33	0.98	1.53	2.28	$y \rightarrow +\infty$

曲线形状如图

2.134 所示. 作出下列用极坐标  $(\varphi, r)$  ( $r \geq 0$ ) 表示的函数的图形:

1546.  $r = a + b \cos \varphi$   
 $(0 < a \leq b).$

**解** 当  $a = b$  时,  
 $r = a(1 + \cos \varphi),$   
 这就是心脏线, 如

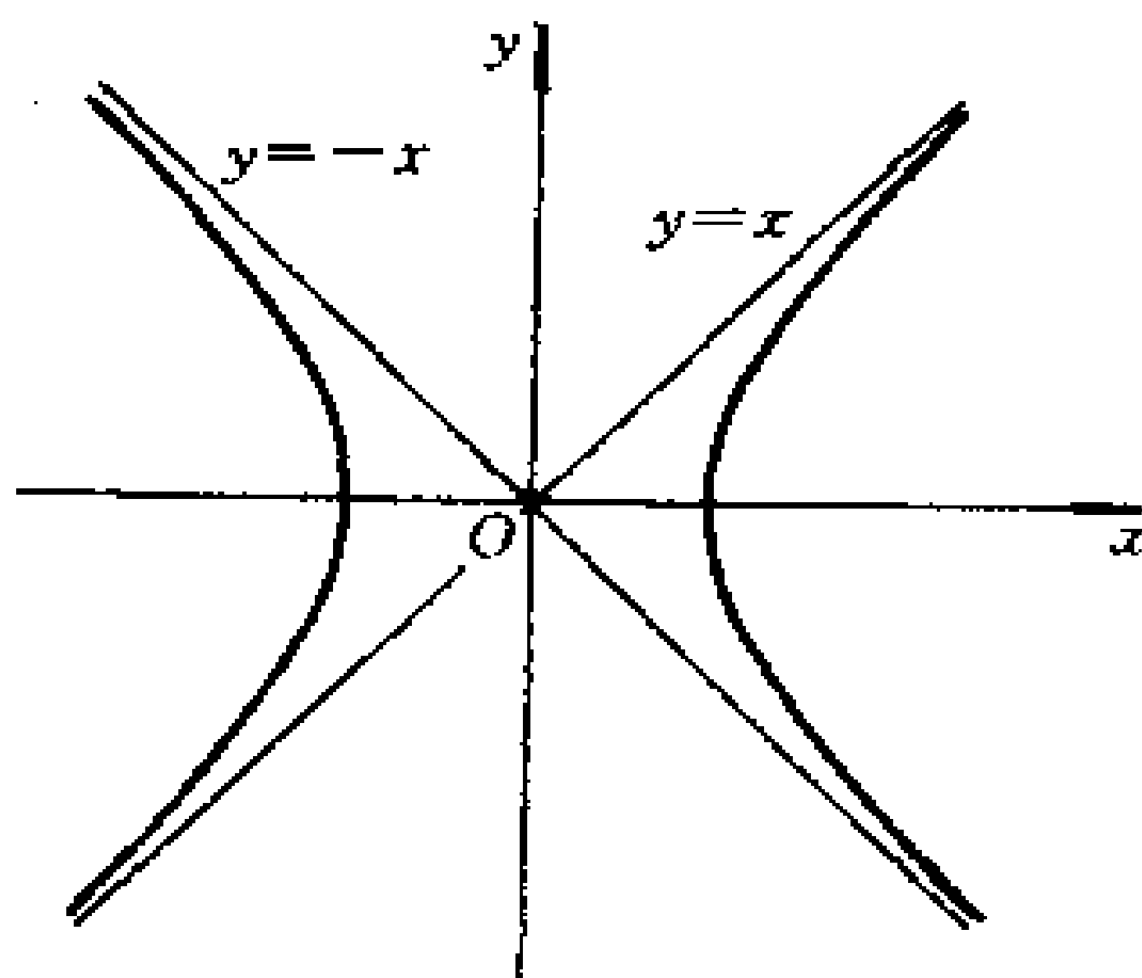


图 2.134

图 2.135 所示.

当  $0 < a < b$  时, 其几何轨迹叫做蚶线, 由于  $r(-\varphi) = r(\varphi)$ , 故图形关于极轴对称. 由于当  $r \geq 0$  时,  $|\varphi| \leq \alpha = \arccos\left[1 - \frac{a}{b}\right]$ , 故当  $\varphi = 0$  时  $r$  有极大值  $r = a + b$ ; 当  $\varphi = \pm \alpha$  时  $r$  有边界的极小值  $r = 0$ . 又由于  $r' = -b \sin \varphi < 0$ , 故当  $\varphi$  由 0 变到  $\alpha$  时,  $r$  由  $a + b$  变到 0.

当  $r < 0$  时,  $\alpha < |\varphi| \leq \pi$ , 仿照上述讨论,  $r$  由 0 下降到  $a - b$ .

极点  $O$  为二重点, 如图 2.136 所示. 如果不考虑  $r < 0$ , 则极点  $O$  不是二重点.

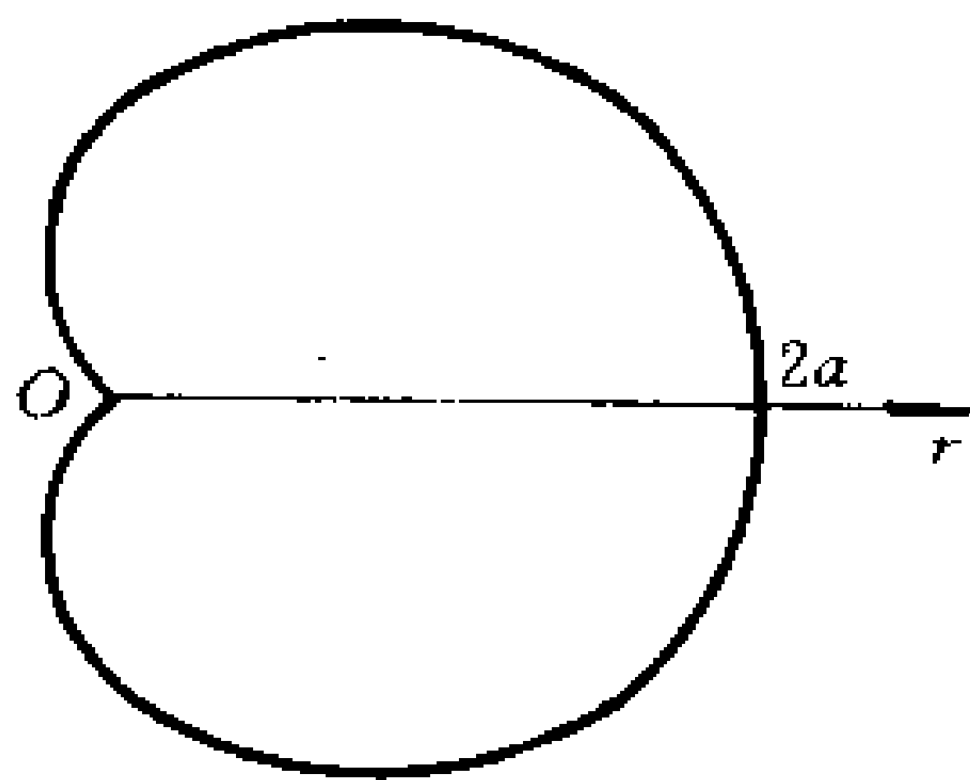


图 2.135

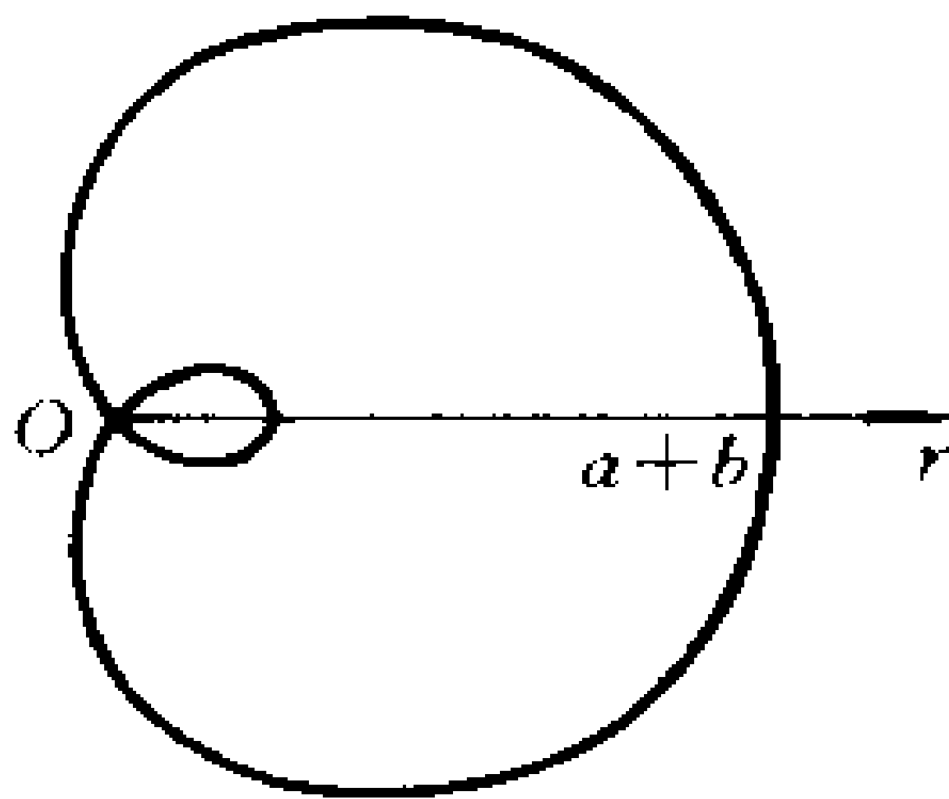


图 2.136

1547.  $r = a \sin 3\varphi$  ( $a > 0$ ).

**解** 由于  $r\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = r(\varphi)$ , 故函数  $r$  是以  $\frac{2\pi}{3}$  为周期的函数.

函数的存在域为:



$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi; \frac{4\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}.$$

为此, 只要讨论  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$  即可.

$$r' = 3a \cos 3\varphi \begin{cases} > 0, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right), \\ < 0, \varphi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right). \end{cases}$$

故当  $\varphi = \frac{\pi}{6}$  时  $r$  有极大值  $r = a$ ; 当  $\varphi = 0$  及  $\frac{\pi}{3}$  时,  $r$  有极小值  $r = 0$ .

射线  $\varphi = \frac{\pi}{6}, \varphi = \frac{5\pi}{6}$  及  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$  为图形的三对称轴.

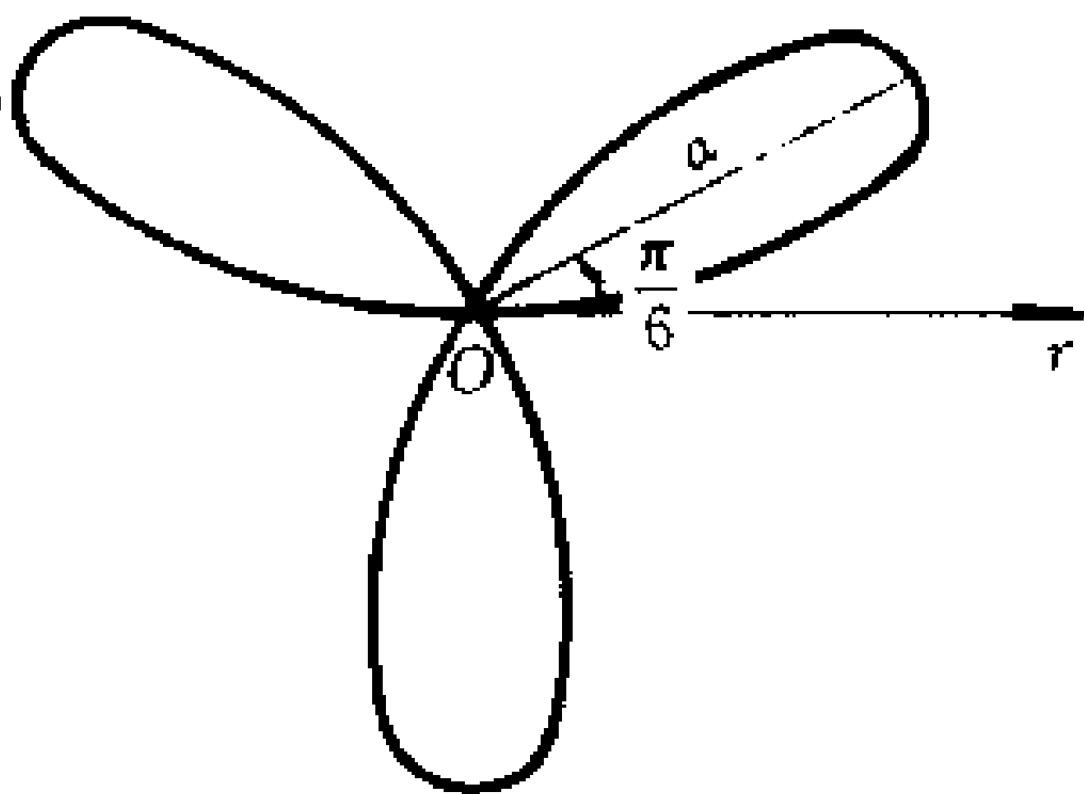


图 2.137

曲线在点  $O$  自交且为三重点, 整个图形有三个形状相同的瓣, 如图 2.137 所示.

1548.  $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}} (a > 0).$

**解** 由于  $r\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = r(\varphi)$ , 故函数  $r$  是以  $\frac{2\pi}{3}$  为周期的函数. 显然图形关于极轴对称.

函数的存在域为:

$$|\varphi| < \frac{\pi}{6} \text{ 及 } \frac{\pi}{2} < |\varphi| < \frac{5\pi}{6}.$$

解 由于

$$\lim_{\varphi \rightarrow 1} r = \lim_{\varphi \rightarrow 1}$$

$$\frac{a \operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} = +\infty,$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow +\infty} r = \lim_{\varphi \rightarrow +\infty}$$

$$\frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} = \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \frac{a}{\operatorname{ch}^2 \varphi}$$

$$= 0,$$

从而曲线以  $\varphi = 1$  为渐近线, 以极点为渐近点. 又

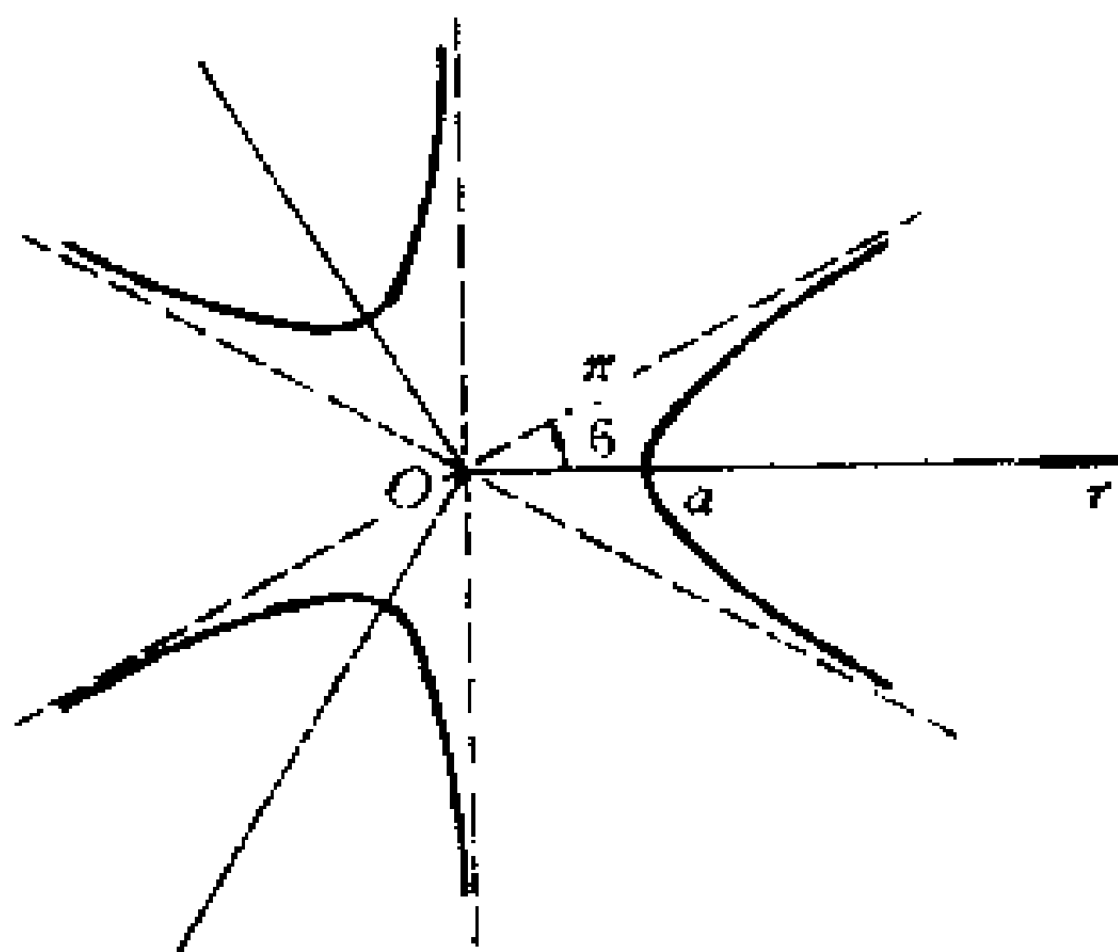


图 2.138

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= a \cdot \frac{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi}(\varphi - 1) - \operatorname{th} \varphi}{(\varphi - 1)^2} \\ &= a \cdot \frac{(\varphi - 1) - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi}{(\varphi - 1)^2 \operatorname{ch}^2 \varphi}, \end{aligned}$$

当  $1 < \varphi < +\infty$  时恒有  $(\varphi - 1) - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi < 0$ . 事实上, 令

$$y(\varphi) = (\varphi - 1) - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi.$$

则  $y(1) = -\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 < 0$ , 而

$$y'(\varphi) = 1 - \operatorname{ch} 2\varphi < 0,$$

故有  $y(\varphi) \leq y(1) < 0$ . 这就证明了当  $1 < \varphi < +\infty$  时恒有  $\frac{dr}{d\varphi} < 0$ , 即当  $\varphi$  增大时  $r$  单调减小.

为考察当  $r \rightarrow +\infty$  时曲线的变化趋势, 令

$$y_1 = x \operatorname{tg} 1, y_2 = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \sin \varphi.$$

由于

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \sin \varphi - x \operatorname{tg} 1 \\ &= a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \sin \varphi - a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \cos \varphi \operatorname{tg} 1 \\ &= a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \cos \varphi \operatorname{tg} 1 \\ &= a \operatorname{th} \varphi \cos \varphi \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} 1}{\varphi - 1}, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow 1} (y_2 - y_1) &= \lim_{\varphi \rightarrow 1} a \operatorname{th} \varphi \cos \varphi \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} 1}{\varphi - 1} \\ &= \frac{a \operatorname{th} 1}{\cos 1}. \end{aligned}$$

于是, 在直角坐标系下, 当  $r \rightarrow +\infty$  时, 曲线  $r = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1}$  以直线

$$y = x \operatorname{tg} 1 + a \frac{\operatorname{th} 1}{\cos 1}$$

为渐近线.

计算几点的坐标如下表:

$\varphi$	1.2	1.4	$\frac{\pi}{2}$	1.6	1.8	2	2.5	$\pi$	5	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	10	$\varphi \rightarrow +\infty$
$r$	$4.15a$	$2.20a$	$1.59a$	$1.53a$	$1.17a$	$0.96a$	$0.65a$	$0.46a$	$0.24a$	$0.21a$	$0.18a$	$0.11a$	$r \rightarrow 0$

综上所述知, 曲线是螺状线, 如图 2.139 所示.

1550.  $\cos \varphi = \frac{r-1}{r^2}.$

解 由方程容易判定, 曲线关于极轴对称. 因而只需在  $0 \leq \varphi \leq \pi$  范围内研究图形. 方程可化为

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}.$$

由于必有  $1 - 4\cos\varphi \geq 0$ , 故角  $\varphi$  的最小值应为

$$\varphi = \arccos \frac{1}{4} \approx$$

$75^\circ 30'$ ,

对应的  $r = 2$ . 由  $r > 0$  知曲线方程为

$$r = \frac{1 + \sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} \left( \arccos \frac{1}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \right); (1)$$

$$r = \frac{1 - \sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} \quad (2)$$

首先研究方程(1)所表示的曲线的图形, 因为随着  $\varphi$  增加,  $2\cos\varphi$  减小,  $\sqrt{1-4\cos\varphi}$  增大, 因而  $r$  随  $\varphi$  增加而单调增加, 事实上, 易证  $\frac{dr}{d\varphi} > 0$ . 又

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} r = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{1 + \sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} = +\infty,$$

所以, 当  $r \rightarrow +\infty$  时有渐近线  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . 又由  $\cos\varphi = \frac{r-1}{r^2}$ , 得

$$x = \frac{r-1}{r},$$

故当  $r \rightarrow +\infty$  时  $x \rightarrow 1$ , 即当  $r \rightarrow +\infty$  时, 曲线与直线  $r = \frac{1}{\cos\varphi}$  无限接近(直角坐标系下  $x = 1$  为渐近线).

再来研究拐点, 由

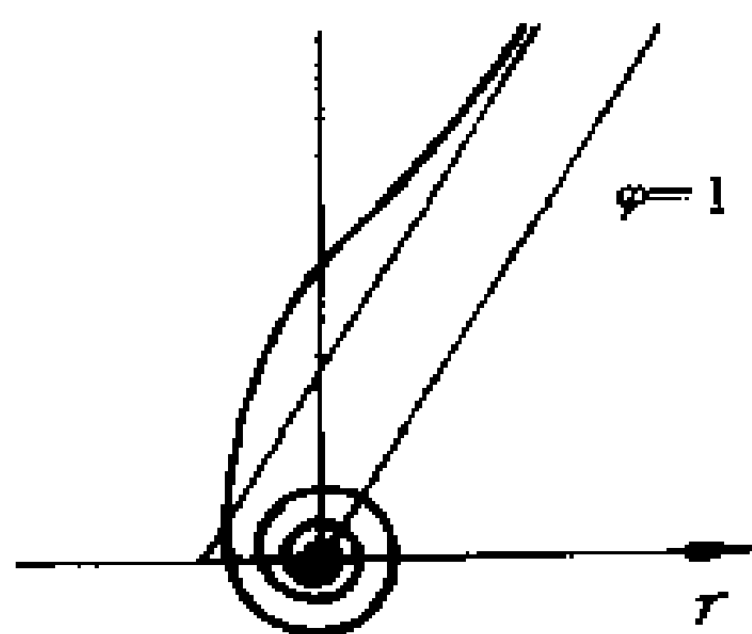


图 2.139

$$\frac{d\cos\varphi}{dr} = \frac{r^2 - 2r(r-1)}{r^4} = \frac{2-r}{r^3},$$

$$-\sin\varphi \frac{d\varphi}{dr} = \frac{2-r}{r^3},$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^3}{r-2}\sin\varphi,$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{d\varphi^2} &= \frac{3r^2(r-2)-r^3}{(r-2)^2} \frac{dr}{d\varphi} \sin\varphi + \frac{r^3}{r-2} \cos\varphi \\ &= \frac{r^3(2r^3-6r^2)}{(r-2)^3} \sin^2\varphi + \frac{r^3}{r-2} \cos\varphi \\ &= \frac{r^5(2r-6)}{(r-2)^3} \left[1 - \frac{(r-1)^2}{r^4}\right] + \frac{r^3}{r-2} \cdot \frac{r-1}{r^2} \\ &= \frac{r\{(2r-6)[r^4-(r-1)^2] + (r-2)^2(r-1)\}}{(r-2)^3}.\end{aligned}$$

由  $r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2} = 0$  得  $2r^4 - 3r^2 + 8r - 6 =$

0, 经判别知: 拐点的  $r$  介于  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  和 1 之间.

再来研究方程(2). 由于

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} r = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{1 - \sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} = 1,$$

事实上, 由  $\cos\varphi = \frac{r-1}{r^2}$  也可得: 当  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  时,  $r = 1$ . 因

而点  $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$  是曲线上的点. 又

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\varphi} &= \frac{1}{(2\cos\varphi)^2} \left[ (1-4\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}} (-2\sin\varphi) \right. \\ &\quad \left. \cdot (2\cos\varphi) + 2\sin\varphi(1 - \sqrt{1-4\cos\varphi}) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sin\varphi[(1 - \sqrt{1-4\cos\varphi})\sqrt{1-4\cos\varphi} - 2\cos\varphi]}{(2\cos\varphi)^2\sqrt{1-4\cos\varphi}} \\
&= \frac{2\sin\varphi[\sqrt{1-4\cos\varphi} - (1 - 2\cos\varphi)]}{(2\cos\varphi)^2\sqrt{1-4\cos\varphi}}. \quad (1)
\end{aligned}$$

容易证明:  $f(\varphi) = \sqrt{1-4\cos\varphi} - (1 - 2\cos\varphi) < 0$ . 事实上, 有

$$f'(\varphi) = 2\sin\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{1-4\cos\varphi}} - 1\right) < 0 \quad \text{且} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

又因当  $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  时, (1) 的其它因子均为正, 故得  $\frac{dr}{d\varphi} < 0$ , 即  $r$  随  $\varphi$  的增加而单调下降, 并且当  $\varphi = \pi$  时达到极小值

$$r = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

事实上,  $\frac{dr}{d\varphi}$  经过  $\varphi = \pi$  从负变到正.

计算几点的坐标列表如下:

$\varphi$	$75^\circ 30'$	$76^\circ 5'$	$77^\circ 10'$	$81^\circ$	$84^\circ$	$87^\circ$	$\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0$	$90^\circ$	$105^\circ$	$140^\circ$	$155^\circ$	$180^\circ$
$r$	2	2.5	3	5	8.85	19.7	$r \rightarrow +\infty$	1	0.81	0.66	0.63	0.62

曲线如图 2.140 所示.

作出下列曲线族的图表( $a$  表参变量):

1551.  $y = x^2 - 2x + a.$

解 将方程变形:

$$y - (a - 1) = (x - 1)^2.$$

作平移

$$\begin{cases} x = x' + 1, \\ y = y' + (a - 1), \end{cases}$$

即得标准方程

$$y' = x'^2,$$

此为向上凹的抛物线.

当  $a > 1$  时, 抛物线的顶点位于第一象限; 当  $a < 1$  时, 抛物线的顶点位于第四象限; 当  $a = 1$  时, 抛物线的顶点在  $(1, 0)$ . 不论  $a$  为何值, 此抛物线族的顶点位于直线  $x = 1$  上. 如图 2.141 所示.

1552.  $y = x + \frac{a^2}{x}.$

**解** 当  $a = 0$  时为直线  $y = x$ . 当  $a \neq 0$  时为双曲线族, 其图形可由

$$y = x \text{ 和 } y = \frac{a^2}{x} \text{ 相}$$

加而成, 它们均以直线

$y = x$  和  $x = 0$  为渐近线.

当  $x = |a|$  时, 有极小值  $y = 2|a|$ ; 当  $x = -|a|$  ( $a \neq 0$ ) 时有极大值

$y = -2|a|$ . 如图 2.142 所示.

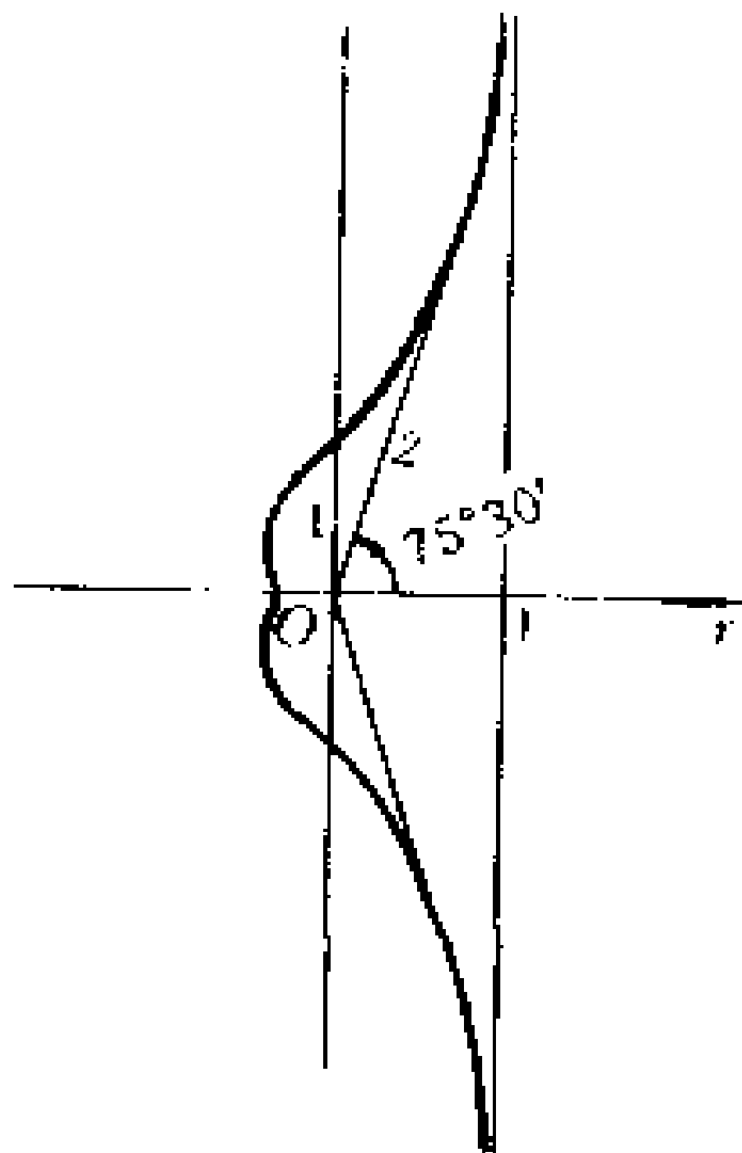


图 2.140

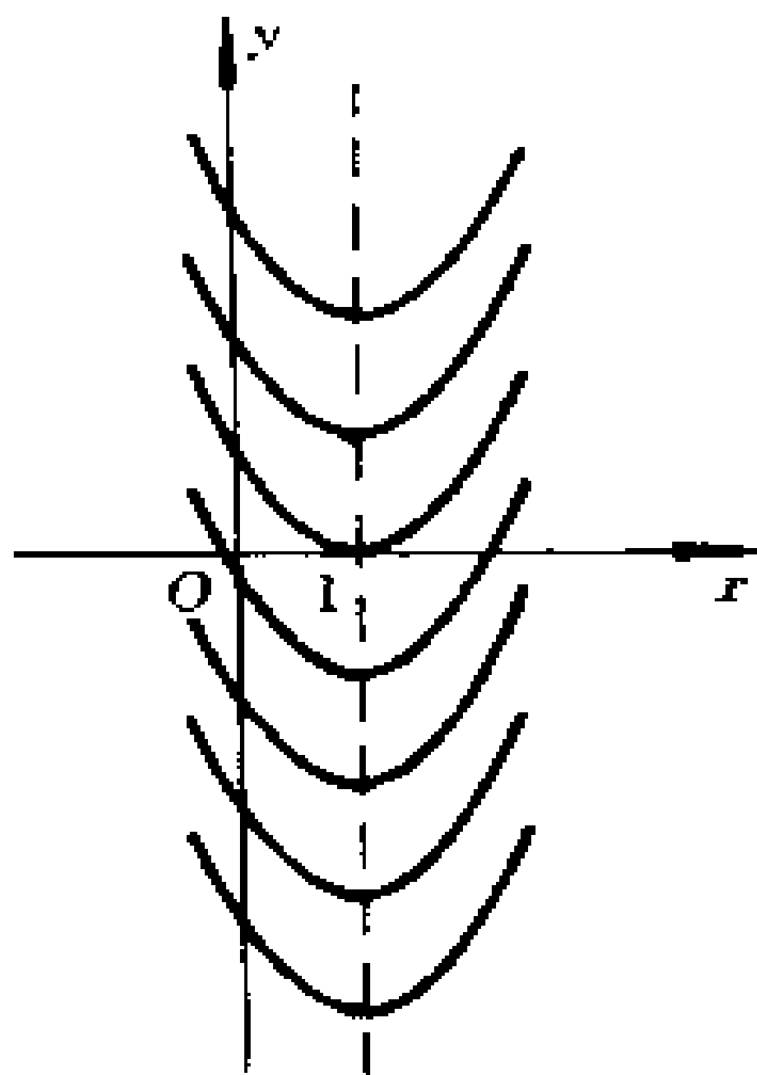


图 2.141

1553.  $y = x \pm \sqrt{a(1-x^2)}$ .

解  $y - x = \pm \sqrt{a(1-x^2)}$ , 即  $(y-x)^2 + ax^2 = a$ .

作仿射变换

$$\begin{cases} \xi_1 = -x + y, \\ \xi_2 = x, \end{cases}$$

则原方程变形为

$$\xi_1^2 + a\xi_2^2 = a.$$

当  $0 < a < +\infty$

时为椭圆族; 当  $-\infty$

$< a < 0$  时为双曲线

族; 当  $a = 0$  时为直线  $y = x$ .

全族曲线均通过点  $(-1, -1)$  及  $(1, 1)$ .

$y' = 1 \mp \frac{ax}{\sqrt{a(1-x^2)}}$ . 令  $y' = 0$ , 得

$$x^2 = \frac{1}{1+a},$$

则  $1+a > 0$  或  $a > -1$ .

$$y'' = \mp \frac{a^2}{[a(1-x^2)]^{\frac{3}{2}}},$$

当  $y \geq x$  时上式取负号; 当  $y \leq x$  时上式取正号.

于是, 当  $y \geq x$  时, 有

(1) 若  $a > 0$ , 则当  $x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}$  时, 由于  $y'' < 0$ ,

故取得极大值  $y = \sqrt{1+a}$ .

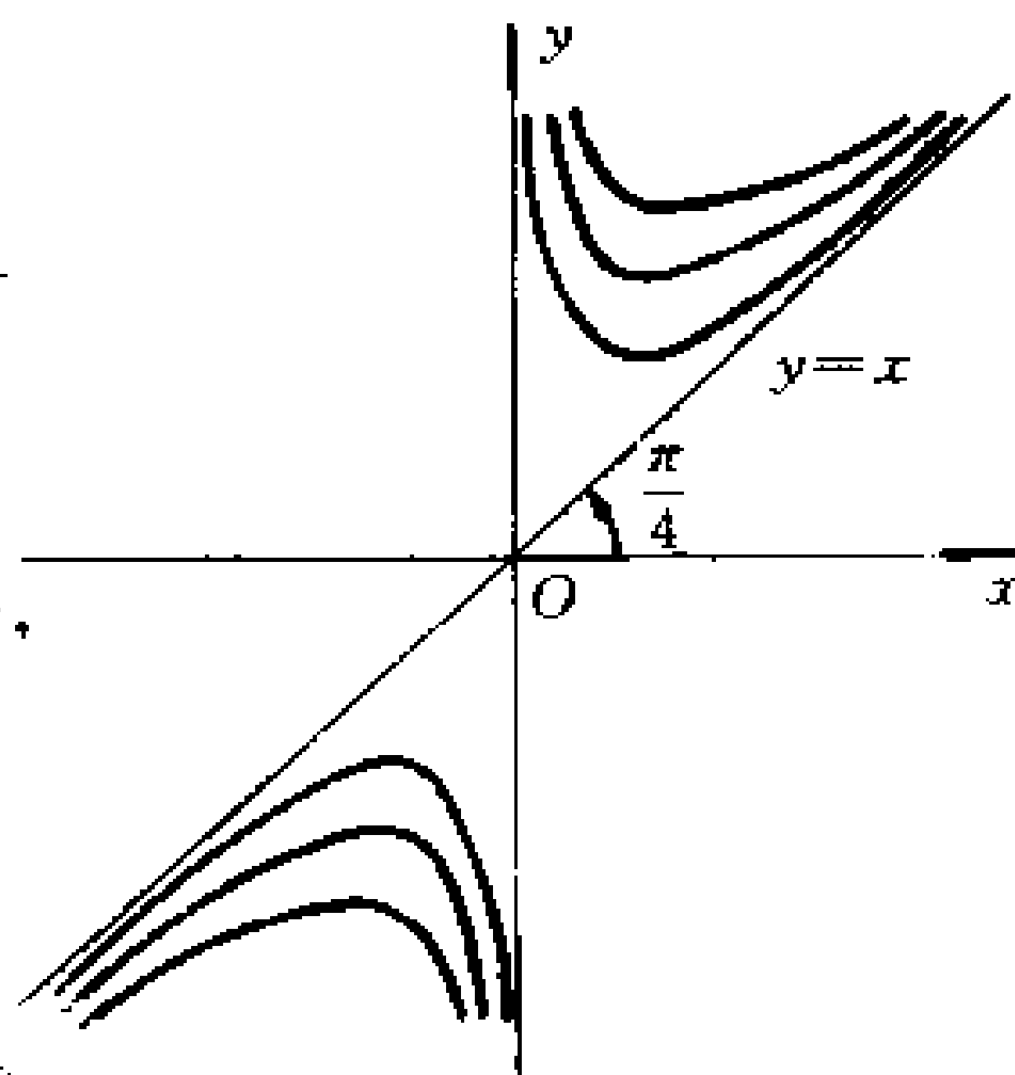


图 2.142



若  $-1 < a < 0$ , 则当  $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$  时也取得极

大值  $y = -\sqrt{1+a}$ .

当  $x = \mp 1$  时取得边界极小值  $y = \mp 1 (a \neq 0)$ .

(2) 由于  $y'' < 0$ , 故曲线是凸的.

当  $y \leq x$  时, 有

(1) 若  $a > 0$ , 当  $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$  时有极小值

$$y = -\sqrt{1+a}.$$

若  $-1 < a < 0$ , 当  $x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}$  时有极小值

$$y = \sqrt{1+a}.$$

当  $x = \mp 1$  时取得边界极大值  $y = \mp 1$ .

(2) 由于  $y'' > 0$ , 故曲线是凹的.

此外, 当  $a < 0$  时, 曲线有渐近线, 容易求得它们为  $y = (1 \pm \sqrt{-a})x$ .

椭圆族、双曲线族与直线已为大家所熟悉, 故图略.

1554.  $y = \frac{x}{2} + e^{-ax}.$

解 原方程可变形为

$$y - \frac{x}{2} = e^{-ax}.$$

因此, 若作仿射变换

$$\begin{cases} \xi_1 = -\frac{x}{2} + y, \\ \xi_2 = x, \end{cases}$$

则原方程化成标准形式

$$\xi_1 = e^{-ax}2.$$

当  $a \neq 0$  时, 表示一指数曲线族; 当  $a = 0$  时, 表示直线  $y = 1 + \frac{x}{2}$ .

全族曲线均通过点  $(0, 1)$ .

$$y' = \frac{1}{2} - ae^{-ax}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = \frac{1}{a} \ln 2a.$$

$$y'' = a^2 e^{-ax} > 0, \text{ 故曲线呈凹状.}$$

若  $a > 0$ , 则当  $x = \frac{1}{a} \ln 2a$  时有极小值

$$y = \frac{1}{2a} (1 + \ln 2a);$$

若  $a \leq 0$ , 则因  $y' > 0$ , 故函数  $y$  是增大的.

现求渐近线: 当  $a > 0$  时,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{xe^{ax}} \right) = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = 0,$$

故渐近线为  $y = \frac{x}{2}$ .

同法求得当  $a < 0$  时, 渐近线也为  $y = \frac{x}{2}$ , 然此时应考虑  $x \rightarrow -\infty$ .

如图 2.143 所示.

1555.  $y = xe^{-\frac{x}{a}}.$

**解** 全族曲线均通过原点.

$$y' = e^{-\frac{x}{a}} \left( 1 - \frac{x}{a} \right), \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得}$$

$$x = a.$$

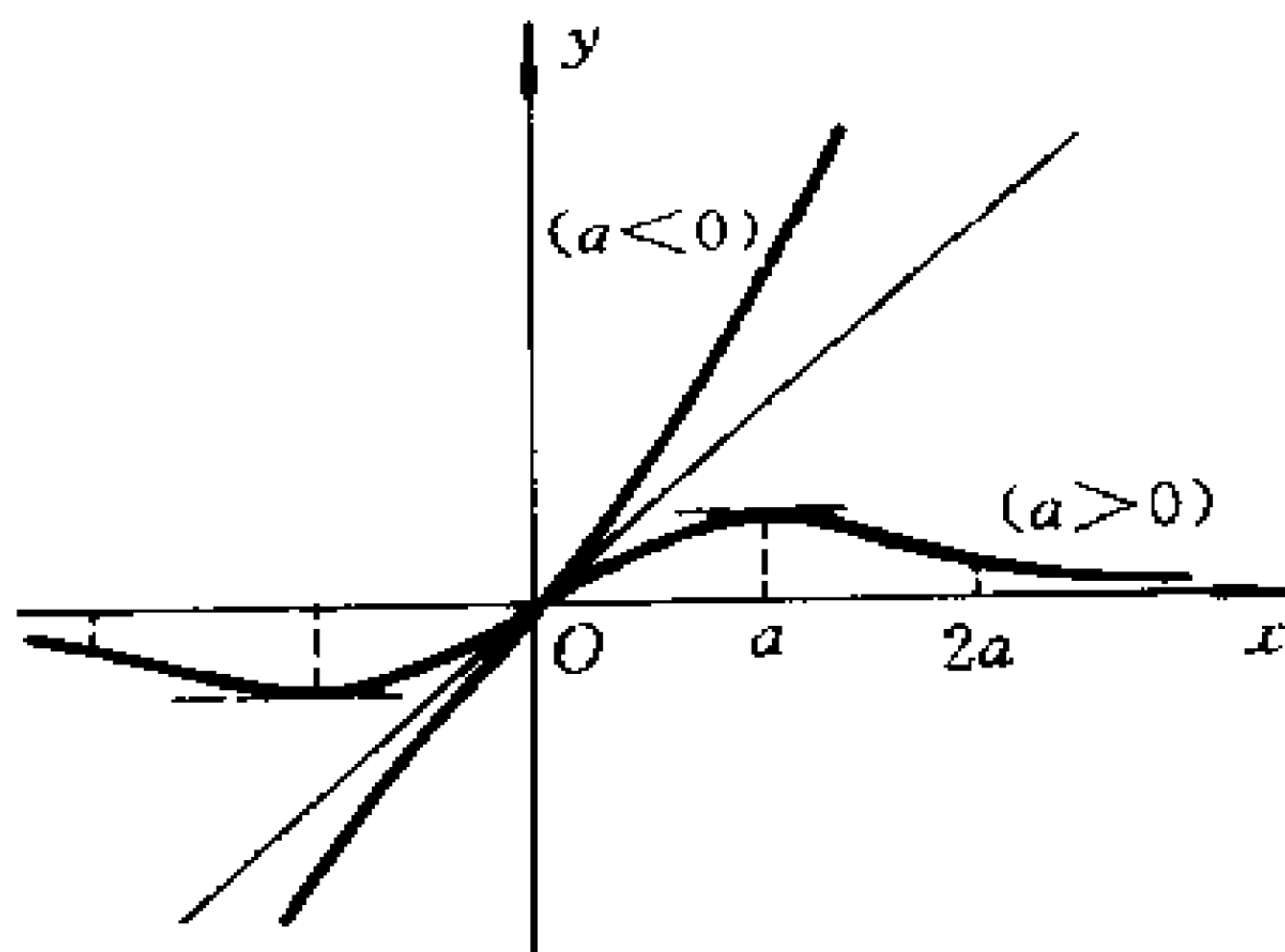


图 2.144

证 如果  $x_0$  为  $F(x)$  的极大值点, 则在  $x_0$  点附近有

$$F(x_0) > F(x) \quad (x \neq x_0) \quad (*)$$

即  $Cf^2(x_0) > Cf^2(x)$ . 根据  $C > 0$ , 以及  $f(x)$  不为负, 必有

$$f(x_0) > f(x) \quad (x \text{ 在 } x_0 \text{ 附近, 且 } x \neq x_0)$$

这就证明了  $x_0$  点也为  $f(x)$  的极大值点. 反之, 若  $x_0$  为  $f(x)$  的极大值点, 则在  $x_0$  附近, 有

$$f(x_0) > f(x) \quad (x \neq x_0).$$

于是,

$$Cf^2(x_0) > Cf^2(x),$$

即  $(*)$  式成立. 这就证明了  $x_0$  点也为  $F(x)$  的极大值点. 同样道理, 若  $x_0$  为极小值点时, 也可证明  $F(x)$  与  $f(x)$  有相同的极小值点.

1557. 证明: 若当  $-\infty < x < +\infty$  时, 函数  $\varphi(x)$  单调增加,

则函数

$$f(x) \text{ 与 } \varphi(f(x))$$

有相同的极值点.

证 设  $x_0$  点为  $f(x)$  的极值点, 例如是极大值点, 则在  $x_0$  点附近有

$$f(x_0) > f(x) \quad (x \neq x_0). \quad (1)$$

因为函数  $\varphi(x)$  为单调增加的, 故也有

$$\varphi(f(x_0)) > \varphi(f(x)) \quad (x \neq x_0). \quad (2)$$

这就证明了  $x_0$  点也是  $\varphi(f(x))$  的极大值点. 反之也对, 因为由 (2), 从  $\varphi(x)$  的单调增加性质知必有 (1). 另一种情形, 即设  $x_0$  点是极小值点时, 也可类似获证. 于是, 原命题得证.

1558. 二正数的和等于常数  $a$ , 求此二正数的  $m$  次幂与  $n$  次幂 ( $m > 0, n > 0$ ) 相乘积的极大值.

解 设一正数为  $x$ , 则按题设, 我们须求函数

$f(x) = x^m(a-x)^n$  ( $0 < x < a$ ) 的极大值. 由于

$f'(x) = x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma - (m+n)x]$ , 故若令

$f'(x) = 0$ , 即得  $x = \frac{ma}{m+n}$ . 当  $0 < x < \frac{ma}{m+n}$  时,

$f'(x) > 0$ ; 当  $a > x > \frac{ma}{m+n}$  时  $f'(x) < 0$ . 因此, 当

$x = \frac{ma}{m+n}$  时,  $f(x)$  有极大值

$$f\left(\frac{ma}{m+n}\right) = \frac{a^{m+n}m^mn^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

1559. 二正数的乘积等于常数  $a$ , 求此二数的  $m$  次幂与  $n$  次幂 ( $m > 0, n > 0$ ) 之和的极小值.

**解** 设一正数为  $x$ , 则按题设, 我们须求函数

$$f(x) = x^m + \left(\frac{a}{x}\right)^n \quad (0 < x < +\infty)$$

的极小值.

由于

$$f'(x) = \frac{mx^{m+n} - na^n}{x^{n+1}}.$$

令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{n}{m+n}}$ . 显然, 在此点的左边,  $f'(x) < 0$ , 而在此点的右边, 有  $f'(x) > 0$ , 故知当

$x = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{n}{m+n}}$  时, 函数  $f(x)$  有极小值

$$f\left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{n}{m+n}}\right] = (m+n) \left(\frac{a^{mn}}{m^m n^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}.$$

**1560.** 取怎样的数为对数之底时有一个数, 它本身和它的对数相等?

**解** 解法一:

设所求之数为  $a$ , 则对于  $0 < a < 1, 1 < a < +\infty$  及  $x > 0$  时

$$\log_a x = x$$

或

$$a^x = x. \quad (1)$$

问题即为  $a$  取怎样的数, 上式才成立.

为研究使(1)式成立的  $a$  及相应的  $x$  的取值情况. 我们在直角坐标系内取曲线

$$\begin{cases} y = a^x, \\ y = x. \end{cases} \quad (2)$$

在交点处, 方程(1) 与(2) 等价(图 2. 145)

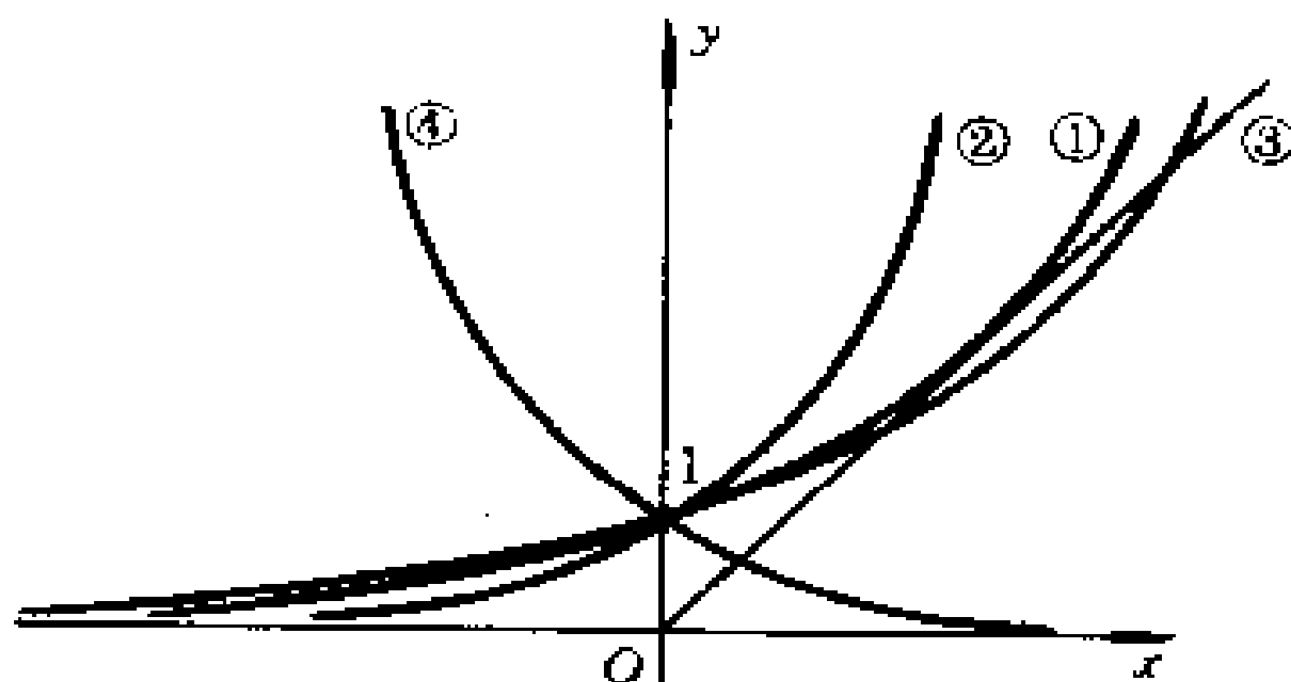


图 2. 145

注意, 指数曲线  $y = a^x$  与直线  $y = x$  是否有公共点, 就看其差

$$\Delta = f(x) = a^x - x$$

有无使  $\Delta = f(x) = 0$  的点  $x$ .

设  $y = a_0^x$  与  $y = x$  相切于一点  $(x_0, a_0^{x_0})$ , 此时  $f'(x_0) = 0$ ,

即有

$$a_0^{x_0} \ln a_0 - 1 = 0. \quad (3)$$

从  $\Delta = 0$  知有(1), 即

$$a_0^{x_0} - x_0 = 0. \quad (4)$$

由(3) 和(4) 可解得

$$a_0 = e^{\frac{1}{e}}, x_0 = e. \quad (5)$$

当  $a > a_0$  时, 易见  $y = a^x$  比  $y = a_0^x$  远离直线  $y = x$ . 故此时无交点. 实际上, 注意到有  $a_0^x \geq x$ , 并记  $g(a, x) = a^x$ , 对于  $x \geq 0$ , 只要  $a > a_0$  就有  $a^x > a_0^x \geq x$ , 也即  $g(a_0, x)$  是  $g(a, x)$  的极小值. 故当  $a > a_0$  时,  $y = a$  与  $y =$

$x$  无交点. 而当  $0 < a \leq a_0$  时(且要求  $a \neq 1$ ), 此时(2)有解, 从而(1)有解. 如图 2.145 中曲线 ①、②、③、④所示.

解法二:

设  $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$ , 则由  $f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$  得  $x = e$ . 显然当  $x$  通过  $e$  时  $f'(x)$  由正变负, 故知  $f(e) = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.445$  为极大值. 从而  $0 < x^{\frac{1}{x}} \leq e^{\frac{1}{e}}$ .

因此, 当  $0 < a \leq e^{\frac{1}{e}}$  且  $a \neq 1$  时, 有  $\log_a x = x$ .

1561. 从面积为  $S$  的一切矩形中, 求其周界为最小者.

解 设矩形的一边长为  $x$ , 则另一边长为  $\frac{S}{x}$ , 周界长为

$$f(x) = 2\left(x + \frac{S}{x}\right),$$

按题设, 我们须求其最小值.

由于  $f'(x) = 2\left(1 - \frac{S}{x^2}\right)$ , 故令  $f'(x) = 0$ , 即得  $x = \sqrt{S}$ . 由  $f''(\sqrt{S}) > 0$  知此时  $f(x)$  有极小值. 又由于极值的唯一性, 故此也为最小值. 因此, 所求的矩形为以  $\sqrt{S}$  为边的正方形.

1562. 若直角三角形的一直角边与斜边之和为常数, 求有最大面积的直角三角形.

解 设一直角边为  $x$ , 则按题设, 另一直角边为  $\sqrt{(a-x)^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - 2ax}$ , 故直角三角形的面积为

$$S(x) = \frac{1}{2}x \sqrt{a^2 - 2ax}.$$

利用极值的解法得: 当  $x = \frac{a}{3}$  时,  $S(x)$  值为极大值. 又

由于极值的唯一性,故知当  $x = \frac{a}{3}$  时,  $S(x)$  取最大值.

此时斜边为  $a - x = a - \frac{a}{3} = \frac{2}{3}a$ , 它为直角边的两倍,故此三角形的两锐角分别为  $30^\circ$  及  $60^\circ$ .

本题也可用 1556 题结论求得结果. 事实上,令  $F(x) = 4S^2(x)$ , 则  $F(x)$  与  $S(x)$  有相同的极值点,对  $F(x)$  求极值可得同样的结果.

1563. 当有怎样的长度大小时,容积为  $V$  的圆柱形闭合罐子有最小的表面积?

解 设底半径为  $x$ , 则高为  $H = \frac{V}{\pi x^2}$ , 故圆柱的表面积为

$$S(x) = 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2} + 2\pi x^2.$$

由于,

$$S'(x) = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2},$$

令  $S'(x) = 0$  得  $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ , 由  $S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) > 0$  知, 当  $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$  时,  $S(x)$  有极小值

$$s\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = \sqrt[3]{54\pi V^2}.$$

由于只有一个极值,故知当底半径为  $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ , 而高为  $\frac{V}{\pi x^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$  时有最小面积  $\sqrt[3]{54\pi V^2}$ .



1564. 在不超过半圆的已知弓形内嵌入有最大面积的矩形.

解 由图 2.146 知,不妨设圆的半径为单位长度,则

$$OA = \cos \varphi$$

$$BC = \sin \alpha,$$

$$BA = \cos \alpha - \cos \varphi.$$

从而矩形面积为

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= 2BC \cdot BA \\ &= 2\sin \alpha (\cos \alpha - \cos \varphi) \\ &= \sin 2\alpha - 2\sin \alpha \cos \varphi. \end{aligned}$$

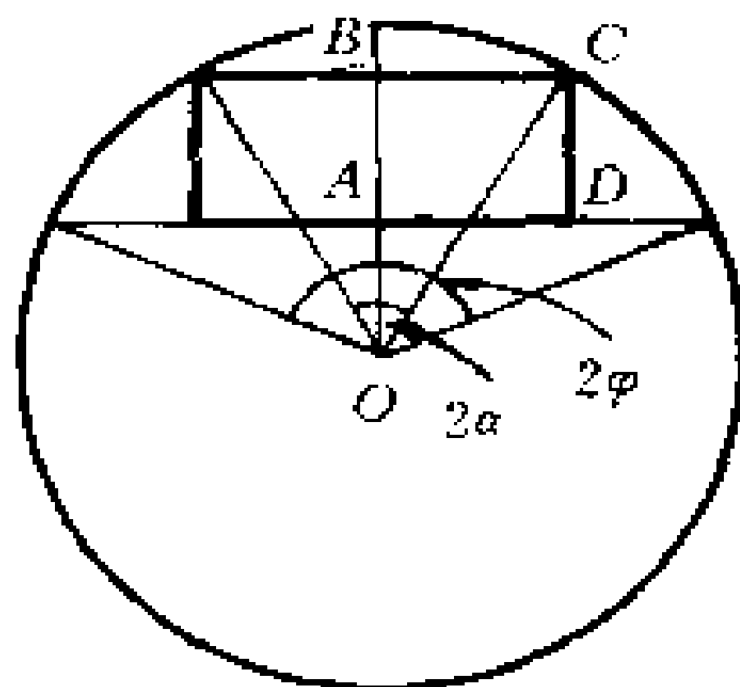


图 2.146

而

$$S'(\alpha) = 2\cos 2\alpha - 2\cos \alpha \cos \varphi = 4\cos^2 \alpha - 2\cos \alpha \cdot \cos \varphi - 2, \text{ 令 } S'(\alpha) = 0, \text{ 可得}$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos \varphi + \sqrt{\cos^2 \varphi + 8}}{4}.$$

注意到  $\alpha \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , 故  $\cos \varphi \leq \cos \alpha$ , 于是有

$$\begin{aligned} S''(\alpha) &= -4\sin 2\alpha + 2\cos \varphi \sin \alpha \leq -4\sin 2\alpha \\ &\quad + 2\cos \alpha \sin \alpha = -3\sin 2\alpha < 0. \end{aligned}$$

这就说明

$$\alpha = \arccos \frac{\cos \varphi + \sqrt{\cos^2 \varphi + 8}}{4}$$

是使  $S(\alpha)$  达到极大值的点, 也就是说此时弓形内所对应的矩形面积最大.

1565. 在椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

中, 嵌入有最大面积而边平行于椭圆轴的矩形.

**解** 如图 2.147 所示.

由于点  $M(x, y)$  在椭圆上, 故适合方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \text{ 解之,}$$

$$\text{得 } y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

于是按题设, 求函数

$$f(x) = 4x \cdot \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

当  $x$  为何值时最大, 记  $C = \frac{a^2}{16b^2}$ , 利用 1556 题的结果,

$f(x)$  与  $F(x) = Cf^2(x) = x^2(a^2 - x^2)$  有相同的极值,

但  $F'(x) = 4x\left(\frac{a^2}{2} - x^2\right)$ , 令  $F'(x) = 0$ , 则  $x = 0$  (不适

合),  $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ . 当  $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$  时, 有  $F''\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -4a^2 <$

0, 故  $f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = 2ab$  为最大面积. 此时矩形的边为  $a$

$\sqrt{2}$  和  $b\sqrt{2}$ .

1566. 在底边为  $b$  及高为  $h$  的三角形中, 嵌入有最大周长的矩形, 研究此问题有解的可能性.

**解** 如图 2.148 所示.

$AB = b, CD = h$ . 由于  $\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$ , 故  $x = \frac{b}{h}(h-y)$ .

矩形的周长为

$$p = 2\left[y + \frac{b}{h}(h-y)\right] = 2\left[\left(1 - \frac{b}{h}\right)y + b\right].$$

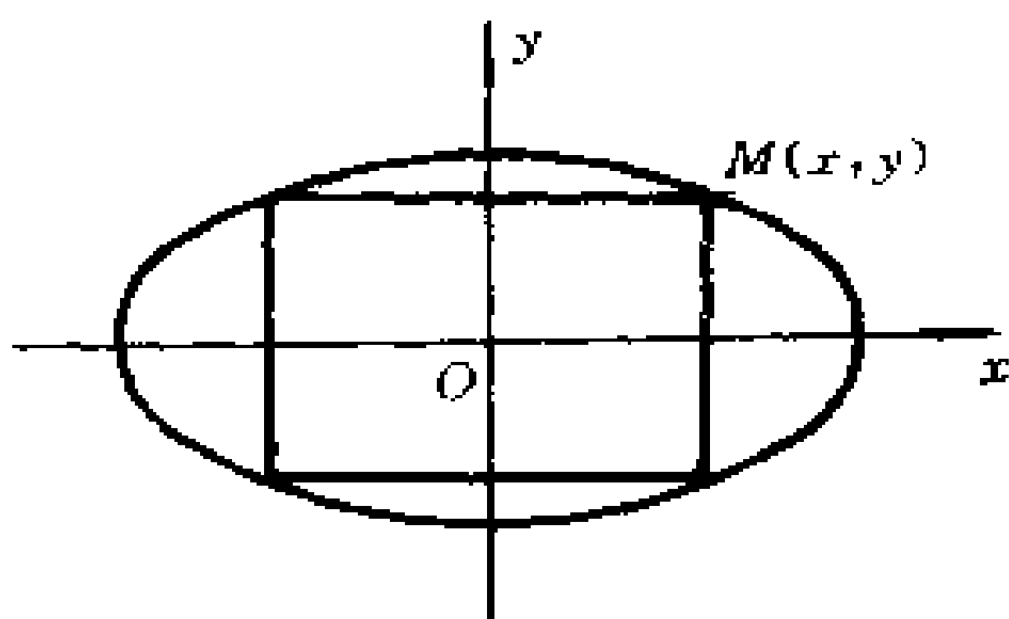


图 2.147

显见,当  $h = b$  时,周长  $p = 2b$  为一定值;当  $h > b$  时,  $p'_y > 0$ ,  $p$  单调增加,故当  $y = h$  时有边界的极大值  $p = 2h$ ;当  $h < b$  时,  $p'_y < 0$ ,  $p$  单调减少,理论上当  $y = 0$  时有边界的极大值

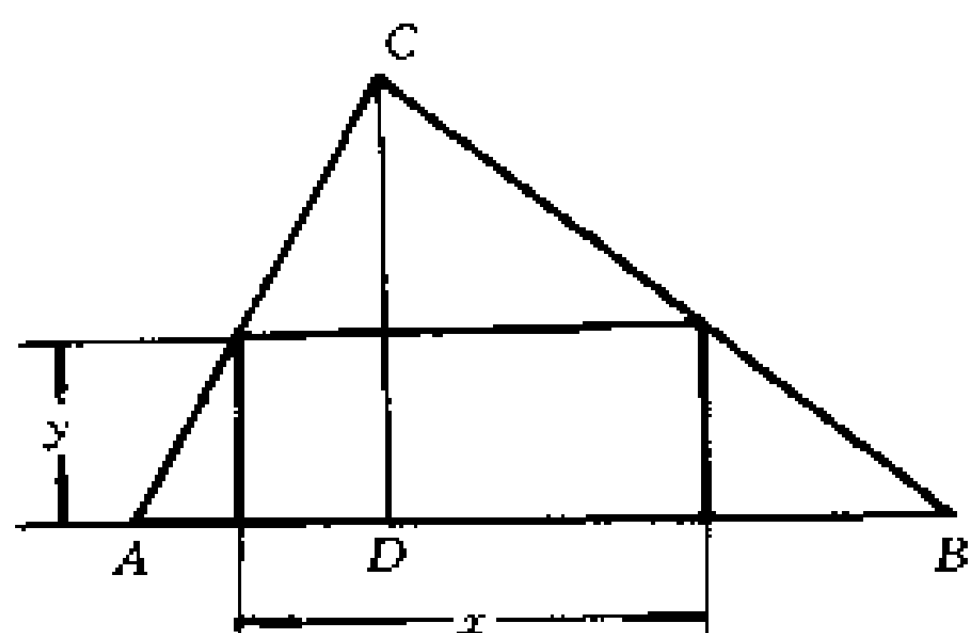


图 2.148

$2b$ . 但嵌入的矩形不允许边长为 0, 故当  $h < b$  时嵌入的矩形有最大周长者是不存在的, 即此时问题无解.

1567. 从直径为  $d$  的圆形树干切出横断面为矩形的梁, 此矩形的底等于  $b$ , 高等于  $h$ . 若梁的强度与  $bh^2$  成比例, 问梁的尺寸为何时, 其强度最大?

**解** 由于  $b^2 + h^2 = d^2$ , 故  $h^2 = d^2 - b^2$ , 从而考虑函数

$$f(b) = b(d^2 - b^2)$$

何时取最大值.

由于  $f'(b) = d^2 - 3b^2$ , 令  $f'(b) = 0$  得  $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ .

此时  $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$ ,  $f''(b) = -6b < 0$ ,  $f(b)$  的值最大. 因

此, 所求的矩形的底为  $\frac{d}{\sqrt{3}}$ , 高为  $d\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

1568. 于半径为  $R$  的半球中, 嵌入有最大体积的底为正方形的直角平行六面体.

**解** 设底边之一半为  $x$ , 则按题设, 有

$$2x^2 + y^2 = R^2,$$

解 如图 2.149, 圆柱的表面积为

$$\begin{aligned} S &= 2\pi(R\cos\varphi)^2 + 4\pi(R\cos\varphi) \cdot (R\sin\varphi) \\ &= \pi R^2(1 + \cos 2\varphi) + 2\pi R^2 \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

由  $\frac{dS}{d\varphi} = 0$  得  $\operatorname{tg} 2\varphi = 2$ . 记其解为  $\varphi_0 = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} 2, \varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . 于是  $\sin 2\varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos 2\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . 又由于

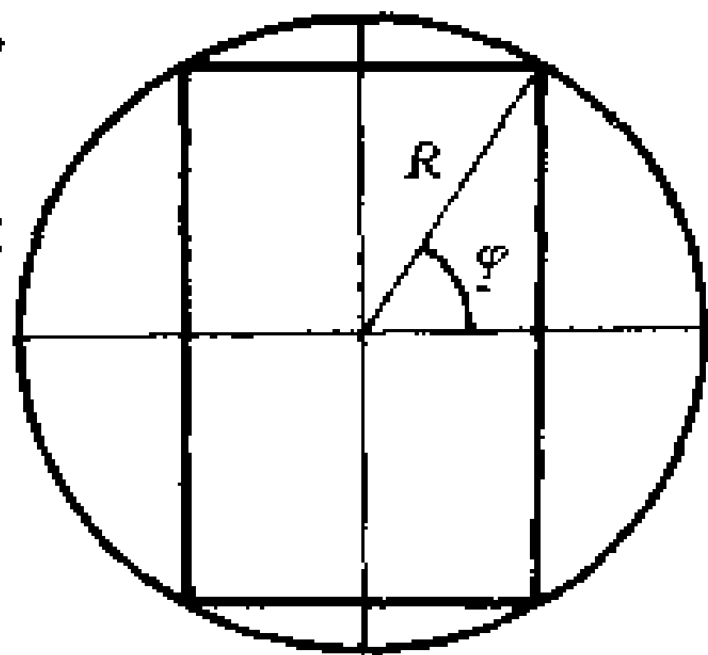


图 2.149

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 S}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} &= -4\pi R^2 [2\sin 2\varphi + \cos 2\varphi]_{\varphi=\varphi_0} \\ &= -4\pi R^2 \left[ 2\sin 2\varphi_0 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_0 \right] \\ &= -10\pi R^2 \sin 2\varphi_0 < 0, \end{aligned}$$

故此时表面积最大, 且最大表面积为

$$\begin{aligned} S &= \pi R^2 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + 2\pi R^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \\ &= \pi R^2 (1 + \sqrt{5}) \\ &\approx 0.81 \times 4\pi R^2. \end{aligned}$$

从而, 球内嵌入圆柱的最大表面积约为球面面积的 81%.

1571. 对于已知球作具有最小体积的外切圆锥.

解 设外切圆锥的底半径为  $x$ , 高为  $h$ , 球的半径为  $R$ , 则可求得  $h = \frac{2Rx^2}{x^2 - R^2}$ , 于是, 外切圆锥的体积为

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 \cdot \frac{2Rx^2}{x^2 - R^2} = \frac{2}{3} \pi R \cdot \frac{x^4}{x^2 - R^2} (x > 0).$$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$



由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

**解** 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

**解** 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$



由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$



由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

**解** 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

**解** 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

**解** 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

**解** 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积之圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$



由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$



由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积之圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积之圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$



由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

**解** 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

**解** 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积之圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积之圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积之圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得  $x = \sqrt{2}R$ , 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为  $l$  的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为  $r$ , 高为  $h$ , 则  $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ , 圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$ . 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于  $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$ , 令  $f'(r) = 0$  得  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 此时  $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . 经判别可知  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$  最大, 因此所求的圆锥的底半径为  $\sqrt{\frac{2}{3}}l$ , 高为  $\frac{l}{\sqrt{3}}$ , 体积最大值为  $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$ .

1573. 于顶角为  $2\alpha$  与底半径为  $R$  的直圆锥中, 嵌入有最大表面积圆柱.

解 设  $r$  及  $h$  为圆柱的底半径与高,  $H$  为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于  $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$ , 即  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ , 故  $h =$